

УДК 583.83

П. Я. ПРИДУБКОВ, кандидат технічних наук, доцент

Українська державна академія залізничного транспорту, м. Харків

І. В. ХОМЕНКО, кандидат технічних наук, доцент

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ РІВНЯНЬ РЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ ЕЛЕКТРОДИНАМІКИ

Рассмотрены уравнения релятивистской электродинамики, описывающие электромагнитное поле в медленно движущейся среде, исследованы аналитические выражения, определяющие необходимость использования данных уравнений, установлена аналитическая зависимость, показывающая целесообразность применения для расчета параметров электромагнитного поля в медленно движущейся среде системы уравнений Максвелла для покоящихся тел.

Розглянуто рівняння релятивістської електродинаміки, що описують електромагнітне поле в середовищі, яке повільно рухається, досліджені аналітичні вирази, що визначають необхідність використання даних рівнянь, установлена аналітична залежність, які показує доцільність застосування для розрахунку параметрів електромагнітного поля в середовищі, що повільно рухається, системи рівнянь Максвелла для тіл, що покояться.

Вступ

Електромагнітні процеси електротехнічних систем (пристроїв), що мають електричні кола, які рухаються щодо одне одного, піддаються чіткому тлумаченню, точному поясненню й можуть бути правильно розраховані тільки з використанням спеціальної теорії відносності, тобто в рамках релятивістської електродинаміки. Так для розрахунків, пов'язаних з явищами електромагнітної індукції, здійснюваних при проектуванні електричних машин і інших аналогічних пристроїв, що мають електричні кола, які рухаються щодо одне одного, необхідне використання законів електродинаміки середовищ, що рухаються.

Сукупність провідників, приймачів і джерел електричної енергії, з'єднаних між собою відповідно до заданої схеми й утворюючих шляхів для протікання електричного струму є електричним колом. В електродинаміці особлива увага приділяється електричним колам, що рухаються, до яких ставляться складові частини електричних машин. При розгляді обертового руху, навіть у випадку с талості кутової швидкості обертання, лінійні швидкості часток середовища на різних відстанях від осі обертання виявляються різними $[v(r) = \omega r]$, і тому електромагнітні процеси в обертових з великою кутовою швидкістю тілах варто описувати виходячи з подань загальної теорії відносності. Однак, розглядаючи лише повільні рухи тіл, у яких $\omega r = v/c \ll 1$ $\left(\frac{\omega r}{c} = \frac{v}{c} \ll 1\right)$, опис всіх електромагнітних явищ можна провести в рамках спеціальної теорії відносності.

Співвідношення, що описують електромагнітні процеси нерухомих електричних кіл, при переході від інерційної системи відліку (ІСВ), пов'язаної з однією частиною електричної системи до іншій ІСВ, що рухається щодо першої, перетворюються відповідно до основних положень релятивістської електродинаміки.

Таким чином, дослідження рівнянь релятивістської електродинаміки, що описують електромагнітні явища при повільних швидкостях взаємного руху матеріальних тіл, з метою встановлення аналітичних залежностей, що визначають необхідність використання або невикористання методів спеціальної теорії відносності при проектуванні пристроїв, що мають електричні кола, які рухаються щодо одне одного є актуальною проблемою.

Основна частина

Науковою основою опису й пояснення процесів поширення електромагнітного поля й теоретичною базою для розробки й проектування більшості електротехнічних пристроїв є електродинаміка середовищ, що покояться. Фарадея-Максвелла. При розрахунках, пов'язаних з явищами електромагнітної індукції, здійснюваних у процесі проектування електричних машин і інших аналогічних пристроїв, що мають обертові частини, використовують узагальнення, внесені в електродинаміку Г. Герцом, поширивши її на середовища, що рухаються. Деяким доповненням щодо цього є введення сили Лоренца - сили, що діє на заряд, які рухаються в електромагнітному полі [1]. Стало бути, дані розрахунки ґрунтуються на дорелятивістській електродинаміці середовищ, що рухаються.

Однак такі електромагнітні явища як уніполярна індукція, електромагнітна індукція й т. п. піддаються правильному розрахунку й чіткому тлумаченню тільки на основі методів релятивістської електродинаміки в рамках спеціальної теорії відносності.

Послідовна теорія електромагнітних явищ у середовищах, що рухаються (релятивістська електродинаміка) ґрунтується на зйінштейнській теорії відносності. Рівняння релятивістської електродинаміки справедливі при будь-якій завгодно постійній швидкості взаємного руху матеріальних тіл, що наближається до швидкості світла, і при будь-якій обмеженій тим же значенням швидкості їхнього руху щодо системи відліку, у якій

вимірюються фізичні величини. При повільних взаємних рухах, при яких $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$, коефіцієнт $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, що входить у формули релятивістської електродинаміки, може бути з точністю

до малої величини другого порядку, прийнятий рівним одиниці. (Величина $\beta = \frac{v}{c}$ розглядається як мала першого порядку.) Під повільними рухами варто мати на увазі руху, швидкість v яких досить мала в порівнянні зі швидкістю світла c . При цьому рівняння електродинаміки для середовищ, що повільно рухаються, можуть розглядатися не самостійно, а виводитися з точних рівнянь, які описують фізичні процеси релятивістської електродинаміки, якщо в них прийняти $\alpha = 1$.

Розглядаючи електромагнітні процеси в матеріальному середовищі, яке рухається зі швидкістю v щодо нерухомої системи відліку, і має параметри ϵ_a , μ_a і γ , можна констатувати, що відповідно до принципу відносності в системі координат, пов'язаної з нерухомою системою відліку, справедлива система рівнянь, що описують електромагнітні процеси в координатній системі, закріпленої разом з матеріальним середовищем, що рухається, [2]. Стало бути, диференціальні рівняння Максвелла без усяких модифікацій можуть бути застосовні не тільки до середовищ, що покояться, але й до середовищ, що рухаються, поза всякою залежністю від того, виконується або не виконується умова повільності $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$ руху :

$$\text{rot}\vec{H} = \gamma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho, \quad (3)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0. \quad (4)$$

Однак останнє твердження носить формальний характер і обумовлюється тим, що для векторів \vec{D} , \vec{E} , \vec{B} , \vec{H} , \vec{P} і \vec{J} зберігаються визначення дані при розгляді електромагнітного поля в середовищі, що покояться [3]:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \text{ и } \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J} \quad (5)$$

Зв'язок між векторами \vec{D} й \vec{E} або \vec{H} й \vec{B} стосовно до середовищ, що рухаються, визначається більше складним шляхом, чим у системі координат, пов'язаної зі середовищем, що покояється.

При макроскопічному розгляді електромагнітного поля в середовищах, що повільно рухаються, для яких виконується умова:

$$\frac{v^2}{c^2} \ll 1, \quad (6)$$

вектори, які характеризують електричний і магнітний момент одиниці об'єму середовища, описуються виразами [2]:

$$\vec{P} = (\varepsilon_a - \varepsilon_0) \vec{E} + \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{B}], \quad (7)$$

$$\vec{J} = \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{E}]. \quad (8)$$

Рівняння (7) справедливо в тому випадку, якщо виконується умова:

$$\frac{v^2}{c^2} \frac{\mu_a - \mu_0}{\mu_a} \ll \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \quad (9)$$

друге ж рівняння (8) можна використати, якщо:

$$\frac{\varepsilon_a - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{v^2}{c^2} \ll \frac{\mu_a - \mu_0}{\mu_a}. \quad (10)$$

Характеристичним співвідношенням, що залежать від властивостей матеріального середовища, між векторами \vec{H} й \vec{D} з однієї сторони й векторами \vec{B} й \vec{E} з іншої сторони при розгляді електромагнітного поля в середовищах, які повільно рухаються, якщо виконуються умови (9) і (10), відповідають наступні вирази:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_a} + \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{E}], \quad (11)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} + \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{B}]. \quad (12)$$

На підставі рівняння (11) для магнітного діелектрика, у якого ($\mu_r \neq 1$) можна написати:

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_a} + \text{rot} \left\{ \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{E}] \right\}. \quad (13)$$

Стало бути, перше рівняння Максвелла для середовищ, що повільно рухаються, описується в такий спосіб:

$$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_a} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot} \left\{ \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{E}] \right\} + \vec{\delta}_{np}. \quad (14)$$

Вектор напруженості електричного поля \vec{E} може бути виражений зі співвідношення (12):

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \right) [\vec{v} \vec{B}]. \quad (15)$$

Для магнітних діелектриків ($\mu_r \neq 1$) і ($\varepsilon_r \neq 1$) друге рівняння Максвелла описується вираженням:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \right) [\vec{v} \vec{B}]. \quad (16)$$

З урахуванням припущення, що немає ніяких зарядів, крім тих, які рухаються із середовищем, іншим співвідношенням, що входять у систему рівнянь електромагнітного поля, відповідають наступні вирази:

$$\operatorname{div} \left\{ \varepsilon_a \vec{E} + \left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right) [\vec{v} \vec{B}] \right\} = \rho, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \left\{ \mu_a \vec{H} - (\varepsilon_a \mu_a - \mu_0 \varepsilon_0) [\vec{v} \vec{E}] \right\} = 0. \quad (18)$$

Закон Ома в диференціальній формі в цьому випадку описується співвідношенням:

$$\vec{\delta} = \gamma \left(\vec{E} + [\vec{v} \vec{B}] \right) + \vec{v} \rho. \quad (19)$$

Розглянуті вище рівняння (1) - (12) являють собою опис електромагнітних процесів у середовищі, що рухається відносно нерухомої системи координат, у макроскопічному наближенні й зневазі малими другого порядку, прийнятими для відносно малих $\left(\frac{v}{c} \ll 1 \right)$ швидкостей, тобто в тому випадку, якщо виконуються умови (3) і (4).

Загальним множником для других доданків у правих частинах рівнянь (1), (2), (5), (6), (8) і (11) є співвідношення $\left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} \right)$, а в рівняннях (9), (10) - $\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} \right)$.

Тому що $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ й $\mu_a = \mu_0 \mu_r$, тоді:

$$\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} = \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\mu_a} = \frac{\varepsilon_a \mu_a - \varepsilon_0 \mu_0}{\mu_a} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a},$$

але $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, тому:

$$\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r} = \frac{1}{c^2} \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a}. \quad (20)$$

Стало бути, вектори, що характеризують електричний і магнітний момент одиниці об'єму середовища, можуть бути визначені також співвідношеннями:

$$\vec{P} = (\varepsilon_a - \varepsilon_0) \vec{E} + \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a} \right) \frac{[\vec{v} \vec{B}]}{c^2}, \quad (21)$$

$$\vec{J} = \left(1 - \frac{1}{\mu_r} \right) \frac{\vec{B}}{\mu_0} + \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a} \right) \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}; \quad (22)$$

Характеристичні співвідношення між векторами \vec{H} й \vec{D} і векторами \vec{B} й \vec{E} при цьому описуються виразами:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_a} + \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a} \right) \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}, \quad (23)$$

$$\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E} + \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a} \right) \frac{[\vec{v} \vec{B}]}{c^2}; \quad (24)$$

Першому рівнянню Максвелла в цьому випадку відповідає тотожність:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_a} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \operatorname{rot} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a} \right) \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2} \right\} + \vec{\delta}. \quad (25)$$

У той час як теорема Гауса в диференціальній формі описується рівнянням:

$$\operatorname{div}\left\{\varepsilon_a \vec{E} + \left(\frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\mu_a}\right) \frac{[\vec{v} \vec{B}]}{c^2}\right\} = \rho. \quad (26)$$

З огляду на, що $\varepsilon_a = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ й $\mu_a = \mu_0 \mu_r$, можна констатувати:

$$1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} = 1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_a \mu_a} = \frac{\varepsilon_a \mu_a - \varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon_a \mu_a} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\varepsilon_a \mu_a},$$

тому що $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$, тоді:

$$1 - \frac{1}{\varepsilon_r \mu_r} = \frac{1}{c^2} \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\varepsilon_a \mu_a}.$$

Таким чином, вектор напруженості електричного поля \vec{E} в середовищі, що повільно рухається, може бути описаний рівнянням:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a} - \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\varepsilon_a \mu_a} \frac{[\vec{v} \vec{B}]}{c^2}. \quad (27)$$

Другому рівнянню Максвелла в середовищі, що повільно рухається, відповідає також вираз:

$$\operatorname{rot} \frac{\vec{D}}{\varepsilon_a} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \left\{ \frac{\varepsilon_r \mu_r - 1}{\varepsilon_a \mu_a} \frac{[\vec{v} \vec{B}]}{c^2} \right\}. \quad (28)$$

Якщо здійснити перетворення над множником $(\varepsilon_a \mu_a - \mu_0 \varepsilon_0)$ співвідношення (12) аналогічні перетворенням, зробленим над множником $\left(\varepsilon_a - \frac{\varepsilon_0}{\mu_r}\right)$ загальним для рівнянь (1), (2), (5), (6), (8) і (11), можна констатувати, що:

$$\varepsilon_a \mu_a - \mu_0 \varepsilon_0 = \mu_0 \varepsilon_0 (\mu_r \varepsilon_r - 1) = \frac{1}{c^2} (\mu_r \varepsilon_r - 1). \quad (29)$$

Тому принцип безперервності магнітного потоку в диференціальній формі може бути описаний рівнянням:

$$\operatorname{div}\left\{\mu_a \vec{H} - (\mu_r \varepsilon_r - 1) \frac{[\vec{v} \vec{E}]}{c^2}\right\} = 0. \quad (30)$$

Стало бути, якщо виконується умова:

$$\frac{v}{c^2} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \ll 1, \quad (31)$$

тоді другим доданком у правих частинах рівнянь (15) - (22), (24) можна зневажити в порівнянні з першим.

Отже, у прийнятому ступені наближення (25) $\left(\frac{v}{c^2} (\varepsilon_r \mu_r - 1) \ll 1\right)$ для розрахунку параметрів електромагнітного поля в середовищі, що повільно рухається, справедлива система рівнянь Максвелла для тел., що покояться.

Висновки

Таким чином, при повільних взаємних рухах матеріальних тіл, при яких виконується умова (VI) і не виконується умова (25), рівняння релятивістської електродинаміки описуються вираженнями (1), (2), (5), (6), (8) - (12). Якщо ж середовищу, що повільно рухається, вірним є співвідношення (25), тоді для опису й розрахунків електромагнітних процесів справедлива система рівнянь Максвелла для тіл, що покояться (I - IV).

Список литературы

1. Новаку В. Введение в электродинамику. – М.: Издательство иностранной литературы. 1963. – 304 с.
2. Меерович Э.А., Мейерович Б.Э. Методы релятивисткой электродинамики в электротехнике и электрофизике. – М.: Энергоатомиздат. 1987. – 232 с.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Издательство Физико-Математической литературы, 2003. – 616 с.

REGARDING APPLICATION OF RELATIVISTIC ELECTRODYNAMICS

P.Ya. PRIDUBKOV, Candidate of Engineering, Associate Professor
I.V. KHOMENKO, Candidate of Engineering, Associate Professor

The paper discusses the equations of the relativistic electrodynamics describing the electromagnetic field in a slowly moving medium, studies analytical expressions, defining the need for application of these equations, determines the analytical dependence that demonstrates viability of application of the system of Maxwell's equations for calculation of the parameter of electromagnetic field in a slowly moving medium.

Keywords: *electric chains locomotive in relation to each other, equalizations of relativism electrodynamics, is slow locomotive environments, equalizations of Maxwell.*

1. To Novak V. Introduction in electrodynamics [Vvedenie v elektrodinamiku] – М.: Publishing house of foreign literature. 1963 . – 304 p.
2. Meerovich E. A. Meyerovich B. E. Methods of relativistic electrodynamics in electrical equipment and electrophysics [Metody relativistkoy elektrodinamiku v elektrotekhnike I elektrofizike]– М.: Energoatomizdat. 1987 . – 232 p.
3. Tamm I. E. Bases of the theory of electricity [Osnovy teorii elektrichestva] – М.: Publishing house of Physical and mathematical literature, 2003. – 616 p.

Поступила в редакцию 22.12 2013