

УДК 532,135; 532

Е. В. БІЛЕЦЬКИЙ, канд. техн. наук

Харківський торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету, м. Харків

Ю. А. ТОЛЧИНСЬКИЙ, канд. техн. наук

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ ПРИ ТЕЧІЇ ДЕЯКИХ НЕНЬЮТОНІВСЬКИХ РІДИН У ТРУБАХ І КАНАЛАХ

В статтє рассматривается проблема теплообмена при течении в трубах и каналах неньютоновских жидкостей. Предложена методика определения теплообменных величин при течении степенных, бингамовских и обобщенных жидкостей.

У статті розглядається проблема теплообміну при течії в трубах і каналах неньютонівських рідин. Запропонована методика визначення теплообмінних величин при течії степеневих, бінгамівських та узагальнених рідин.

Вступ

Теплові процеси є найбільш розповсюдженими у процесах харчової та хімічної технологій. Неізотермічні умови протікання процесів зустрічаються набагато частіше, ніж ізотермічні. Відомо багато способів підведення і відведення теплових потоків до (від) тепловіддачі поверхні машин і апаратів, що передають тепло у тому числі і за принципом: труба в трубі або в сорочці. Величина потоку тепла через деяку тверду поверхню визначається її тепловим опором і коефіцієнтами тепловіддачі зі сторін середовищ, які обмінюються теплом [1, 2, 3]. Якщо середовище є ньютонівським, то коефіцієнти тепловіддачі визначаються за допомогою відомих формул [1, 2, 3]. Теплообмін в неньютонівському середовищі вивчене значно менше. У наведеній роботі пропонується розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі при течії неньютонівської рідини в трубі або каналі. З аналізу останніх досліджень та публікацій можна зробити висновок, що з усього різноманіття неньютонівських рідин найбільш поширеними є представники трьох класів – це бінгамівська рідина, узагальнена зсувна рідина, степенева рідина. Пояснення вимагає термін – узагальнена зсувна рідина. Це така рідина, в'язкість якої залежить від швидкості зрушення довільним способом. Окремим випадком такої рідини є степенева рідина [4]. Такі ділянки течії, як труби і канали, вибрані тому, що труба є основним елементом теплообмінного апарату, а канал – основним елементом робочої камери черв'ячного екструдера [5]. Зміст цієї роботи спирається на ряд результатів про течію згаданих вище рідин у трубах і каналах [6, 7, 8, 9, 10, 11,]. Зокрема, у попередніх роботах була розглянута течія в каналах плоскої і прямокутної форм, межі яких рухаються вздовж самих себе, а також в поздовжньому і поперечному напрямках. У згаданих роботах були побудовані тривимірні поля течії зазначених неньютонівських рідин при різних граничних умовах, які складають необхідні умови обчислення коефіцієнтів тепловіддачі. Як відомо, потік рідини в трубі або каналі може бути організований таким чином, що в процесі підведення або відведення тепла утворюється (або не утворюється) тепловий приграничний шар. При течії самої рідини також може утворюватися (або не утворюватися) гідродинамічний приграничний шар. Течія, в якій гідродинамічний шар відсутній або, що те ж саме, займає весь поперечний переріз труби чи каналу, називається стабілізованою. В іншому випадку – нестабілізованою [1, 2, 3]. Те ж саме справедливо і для процесу перенесення температури [1, 2, 3]. Мірою відносини товщин гідродинамічного і теплового приграничного шарів є число Прандтля [1, 2, 3]. Для більшої частини течій товщини гідродинамічного приграничного шару більше, ніж тепловий, а число Прандтля складає більше одиниці. Це особливо правильно, якщо гідродинамічний приграничний шар займає весь переріз труби або каналу.

Основна частина

У даній роботі розглядаються стабілізовані течії вказаних неньютонівських рідин у гідродинамічному сенсі і нестабілізоване перенесення температури з відносно теплового приграничного шару. Остання умова означає, що число Пекле значно перевищує одиницю [1, 2]. Для обчислення коефіцієнтів тепловіддачі використовується рівняння конвективного переносу температури [1, 2, 3]. На теплообмін впливає компонента швидкості, яка може бути, як дотичною, так і нормальною відносно тепло передаючої поверхні [3], що передає тепло у прямих каналах і трубах при стабілізованій течії нормальна компонента швидкості відсутня. Дотична компонента швидкості може мати дві складові – вздовж і впоперек поздовжньої осі труби або каналу. У цьому випадку дотична компонента швидкості являє собою векторну суму цих складових, і саме ця сума визначає коефіцієнт тепловіддачі.

Рівняння конвективного переносу температури записується так:

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad \chi = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (1)$$

в якому v_x і v_y – дотична і нормальна складові вектора швидкості неньютонівської рідини, м/с;

T – абсолютна температура в рідині, $^{\circ}K$;

χ – температуропровідність рідини, m^2 / c ;

λ – теплопровідність рідини, $BT/m \cdot ^{\circ}K$;

ρ – щільність рідини, kg/m^3 ;

c_p – теплоємність рідини, $Dж/kg \cdot ^{\circ}K$.

Рівняння (1) записано в наближенні теплового приграничного шару так, що в правій його частині збережена тільки поперечна похідна по змінній y . Координата x вважається спрямованою вздовж дотичній компоненти швидкості рідини (у випадку чисто поздовжньої течії дотична компонента спрямована вздовж осі труби або каналу). Вище сказане наведено на рис 1. Розглянемо, якщо $v_y \equiv 0$.

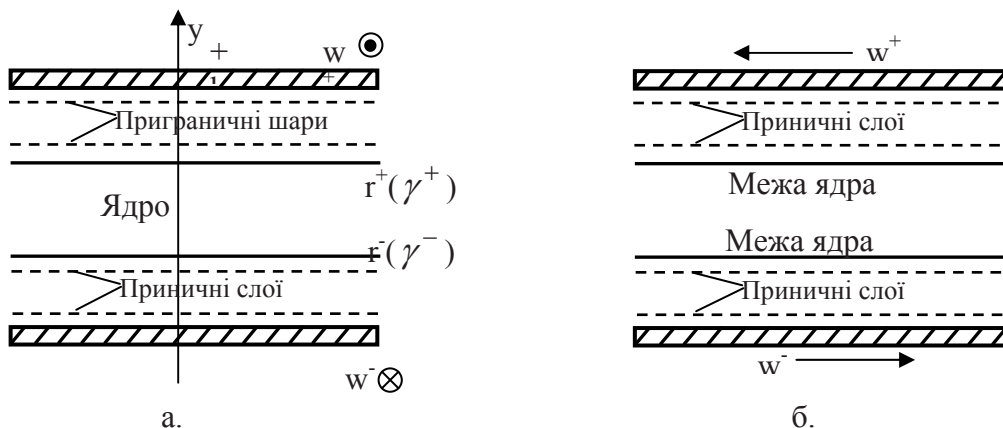


Рис. 1. Теплові приграничні шари у бінгамівській рідині:
а. вид уперек каналу; б. вид уздовж плоского каналу

Маючи на увазі той факт, що існує тепловий приграничний шар, потік тепла біля твердої поверхні залежить від поведінки поля швидкості тільки поблизу цієї поверхні. Для бінгамівських і небінгамівських рідин слід використовувати в (1) розкладання другого і першого порядків відповідно по малій величині відстані до поверхні. Якщо обозначити цю

відстань через \tilde{y} то для бінгамівської і небінгамовської рідин біля меж ділянок течії (стінок труби каналів) слід використовувати таке вираження:

$$v_x = w_\Gamma + \frac{\partial v_x}{\partial \tilde{y}} \tilde{y}, \quad (2)$$

а для бінгамівської рідини поблизу твердого ядра слід використати вираження такого виду:

$$v_x = v_k + \frac{\partial^2 v_x}{\partial \tilde{y}^2} \tilde{y}^2, \quad (3)$$

в яких w_Γ – швидкість стінки, м/с; v_k - швидкість твердого ядра, м/с.

У (3) доданок, пропорційний \tilde{y} відсутній в силу умови звернення в нуль другогоінваріанта тензора швидкості деформацій [4].

Рівняння (1) з v_x по (2) і (3) допускає автомодельні рішення за допомогою підстановок такого виду [6]:

$$\omega = \left(\frac{2}{\chi} \frac{\partial v_x}{\partial \tilde{y}} \right)^{1/3} \frac{\tilde{y}}{x^{1/3}} \quad (\text{для } v_x \text{ по формулі (2)}); \quad (4)$$

$$\omega = \left(\frac{2}{\chi} \frac{\partial^2 v_x}{\partial \tilde{y}^2} \right)^{1/4} \frac{\tilde{y}}{x^{1/4}} \quad (\text{для } v_x \text{ по формулі (3)}),$$

з яких виходить, що щільність теплового потоку зменшується вздовж напрямку дотичної швидкості як $x^{-1/3}$ і $x^{-1/4}$ для першого і другого випадків відповідно. Увівши середнє значення щільності теплового потоку на деякій довжині L і зважаючи на стандартне визначення числа Нуссельта Nu для останнього отримуємо такі вирази:

$$Nu = \frac{2^{2/3}}{3} \frac{h}{L^{1/3}} \left(\frac{1}{\chi} \frac{\partial v_x}{\partial \tilde{y}} \right)^{1/3}, \quad Nu = \frac{8}{15} \frac{h}{L^{1/4}} \left(\frac{1}{\chi} \frac{\partial v_x}{\partial \tilde{y}} \right)^{1/4}, \quad (5)$$

в якому h – напівширина каналу, труби, м.

Таким чином, з (5) виходить, що числа Нуссельта визначаються похідними дотичної до стінки швидкості на стінках каналів, труб і на межах твердого ядра для бінгамівської рідини. Нижче розглядаються течії бінгамівської рідини в плоскому і прямокутному каналах (див. рис. 2 і 3).

Швидкість поздовжньої течії в плоскому каналі має такий вигляд [7]

$$v_{\parallel} = w_{\parallel}^{\pm} - \frac{h}{2\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} (1 - \xi_y^2) \pm \frac{\gamma^{\pm}}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} (1 \mp \xi_y), \quad \xi_y = y/h; \quad (6)$$

$$\gamma^{\pm} = \pm \frac{\tau_0}{dP/d\zeta_h} + \frac{(w_{\parallel}^+ - w_{\parallel}^-)/2}{\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} - \frac{\tau_0}{\mu}}, \quad \xi_h = x/h, \quad \mu_{\text{эф}} = \mu + \frac{\tau_0}{\sqrt{I_2}},$$

де v_{\parallel} – швидкість течії, м/с;

μ – в'язкість бінгамівської рідини $Па \cdot c$;

P – тиск у бінгамівській рідині $Па$;

w_{\parallel}^{\pm} – швидкості верхньої і нижньої меж каналу відповідно, м/с (рис. 2);

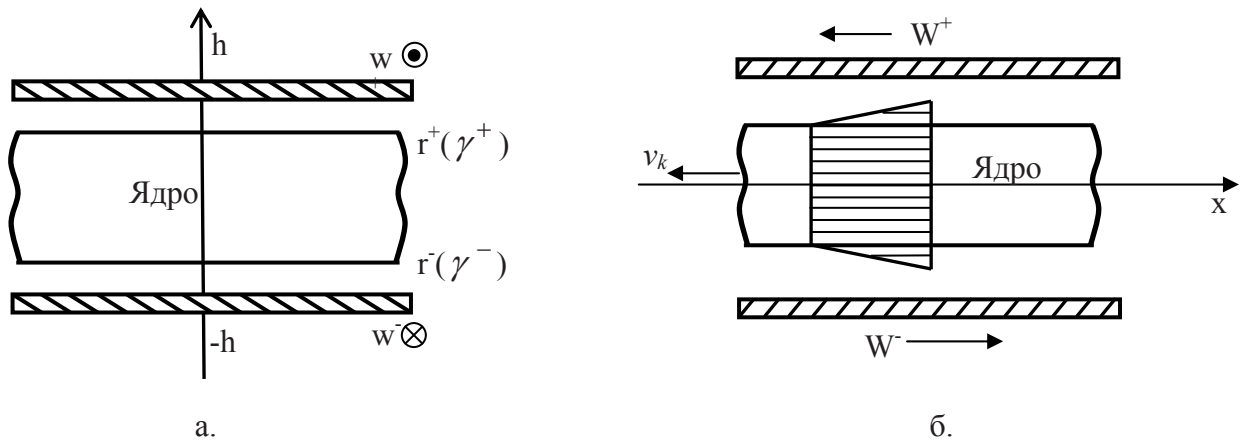


Рис. 2. Поздовжня течія бінгамівської рідини у плоскому каналі
а. вид упоперек каналу; б. вид уздовж каналу

γ^{\pm} – безрозмірні координати твердого ядра;

τ_0 – межа течії, $Па$.

Швидкість подовжньої течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі записується таким чином [8, 9]:

$$v_{\parallel y}^{\pm} = -\frac{h}{2\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} \cdot \frac{1 - \xi_y^2}{1 + \text{ж}^2 \rho_y^{\pm} (1 \mp \gamma_y^{\pm})} \pm \frac{h}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} \cdot \frac{\gamma_y^{\pm} \cdot (1 \mp \xi_y)}{1 + \text{ж}^2 \rho_y^{\pm} (1 \mp \gamma_y^{\pm})} + w_{\parallel y}^{\pm}, \tag{7}$$

$$v_{\parallel x}^{\pm} = -\frac{a}{2\mu} \frac{dP}{d\zeta_a} \cdot \frac{1 - \xi_x^2}{1 + \rho_x^{\pm} (1 \mp \gamma_x^{\pm}) / \text{ж}^2} \pm \frac{a}{2\mu} \frac{dP}{d\zeta_a} \cdot \frac{\gamma_x^{\pm} \cdot (1 \mp \xi_x)}{1 + \rho_x^{\pm} (1 \mp \gamma_x^{\pm}) / \text{ж}^2} + w_{\parallel x}^{\pm},$$

$$\text{ж} = h/a; \quad \xi_y = y/h; \quad \xi_x = x/a; \quad \xi_h = z/h; \quad \xi_a = z/a,$$

де a – ширина прямокутного каналу, м;

h – висота цього каналу, м;

γ_y^{\pm} і γ_x^{\pm} – координати безрозмірних меж твердого ядра, б/р.

Значення величин γ_x^{\pm} і γ_y^{\pm} визначене авторами [8, 9]. Їх конкретний вид є лінійною комбінацією виразів виду (6) для γ^{\pm} з ваговими множниками, залежними від параметра форми каналу ж [8, 9].

Швидкість поздовжньо-поперечної течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі зі швидкістю меж (див. рис. 3). для поздовжньої компоненти швидкості співпадає з виразами (7), а поперечні компоненти швидкості $v_{\perp y}^{\pm}$ і $v_{\perp x}^{\pm}$ представлені наступними виразами [10]:

$$v_{\perp y}^{\pm} = \frac{h}{2\mu} \frac{dP_y}{d\theta_h} \cdot \frac{\xi_y^2 - \gamma_y^{\pm 2} \pm (1 \pm \gamma_y^{\pm})(\gamma_y^{\pm} - \xi_y)}{1 + \text{ж}^2 r^{\pm} \cdot (1 \mp \gamma_y^{\pm})} \pm \frac{w_{\perp y}^{\pm} \cdot (\xi_y - \gamma_y^{\pm})}{1 \mp \gamma_y^{\pm}}, \tag{8}$$

$$v_{\perp x}^{\pm} = \frac{a}{2\mu} \frac{dP_x}{d\theta_a} \cdot \frac{\xi_x^2 - \gamma_x^{\pm 2} \pm (1 \pm \gamma_x^{\pm})(\gamma_x^{\pm} - \xi_x)}{1 + s^{\pm} \cdot (1 \mp \gamma_x^{\pm}) / \text{ж}^2} \pm \frac{w_{\perp x}^{\pm} \cdot (\xi_x - \gamma_x^{\pm})}{1 \mp \gamma_x^{\pm}},$$

$$\theta_h = x/h; \quad \xi_y = y/h;$$

$$\theta_y = y/a; \quad \xi_x = x/a;$$

у яких $dP_y/d\theta_h$, $dP_x/d\theta_a$ – поперечні градієнти тиску в площині поперечного перерізу каналу, Па/м (див. рис. 3).

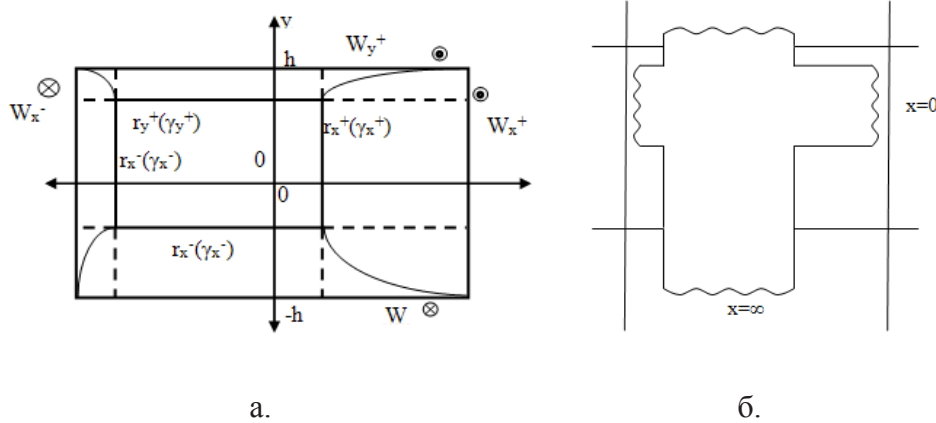


Рис. 3. Течія бінгамовської рідини: а. поздовжня течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі; б. поздовжня течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі як композиція плоских рідин; в. поперечна течія бінгамівської рідини у прямокутному каналі

У формулах (7) і (8) є величини ρ_y^{\pm} , ρ_x^{\pm} , r^{\pm} , s^{\pm} , які залежать від комбінацій граничних умов дробово-раціональним чином які із-за громіздкості обчислень тут не представлені [10]. Спираючись на формули (4) і (5) слід вичислити відповідні похідні. Для плоского каналу і повздовжньої течії є два коефіцієнти тепловіддачі – на верхній і нижній стінках; і два коефіцієнти тепловіддачі – на верхній і нижній межах твердого ядра. Це означає, що потрібно вичислити перші похідні вирази (6) в точках $\xi_y = \pm 1$ і другі похідні

цього ж виразу в точках $\xi_y = \gamma^\pm$. Опускаючи прості проміжні дії можна записати такий результат:

$$\left. \frac{\partial v_{\parallel}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} (1 \mp \gamma^\pm); \quad \left. \frac{\partial^2 v_{\parallel}^\pm}{\partial \tilde{y}^2} \right| = \frac{1}{\mu h} \frac{dP}{d\zeta_h} \quad (9)$$

Отже, числа Нуссельта пропорційні кореню кубічному з першого вираження і кореню четвертого ступеню з другого виразів (9). Враховуючи вираження (6) для γ^\pm виходить, що числа Нуссельта досить складним чином залежать від усіх параметрів течії: градієнта тиску, порогу течії, різниці швидкостей стінок.

У поздовжній течії бінгамівської рідини в прямокутному каналі є вісім меж – чотири стінки і чотири межі твердого ядра. Отже, є вісім коефіцієнтів тепловіддачі. Для їх обчислення потрібно визначити чотири перші похідні від виражень (7) по y і x відповідно в точках $\xi_y = \pm 1$; $\xi_x = \pm 1$ і чотири других похідних по y і x відповідно в точках

$\xi_y = \gamma_y^\pm$, $\xi_x = \gamma_x^\pm$. Опускаючи проміжні перетворення кінцевий результат можна записати так:

$$\left. \frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_h} \cdot \frac{(1 \mp \gamma_y^\pm)}{1 + x^2 \rho_y^\pm \cdot (1 \mp \gamma_y^\pm)}; \quad \left. \frac{\partial^2 v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\gamma_y^\pm} = \frac{1}{\mu h} \frac{dP}{d\zeta_h} \cdot \frac{1}{1 + x^2 \rho_y^\pm \cdot (1 \mp \gamma_y^\pm)} \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial v_{\parallel x}^\pm}{\partial \tilde{x}} \right|_{\pm 1} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta_a} \cdot \frac{(1 \mp \gamma_x^\pm)}{1 + x^2 \rho_x^\pm \cdot (1 \mp \gamma_x^\pm) / x^2};$$

$$\left. \frac{\partial^2 v_{\parallel x}^\pm}{\partial \tilde{x}^2} \right|_{\gamma_x^\pm} = \frac{1}{\mu a} \frac{dP}{d\zeta_a} \cdot \frac{1}{1 + \rho_x^\pm \cdot (1 \mp \gamma_x^\pm) / x^2}$$

Нарешті, в поздовжньо-поперечній течії в прямокутному каналі є вісім коефіцієнтів масовіддачі. Обчислення повністю співпадає з обчисленням для поздовжньої течії. Потрібно використати формули (7) і (8). Єдина відмінність для поздовжньо-поперечної течії полягає в

тому, що замість $v_{\parallel y}^\pm$ і $v_{\perp x}^\pm$ слід вичислити перші і другі похідні від $\sqrt{(v_{\parallel y}^\pm)^2 + (v_{\perp y}^\pm)^2}$ і

$\sqrt{(v_{\parallel x}^\pm)^2 + (v_{\perp x}^\pm)^2}$. Як приклад нижче наводиться обчислення для швидкості з індексом

« y ». Доречні такі вирази:

$$\frac{\partial v_y^\pm}{\partial \tilde{y}} = \frac{1}{2\sqrt{(v_{\parallel y}^\pm)^2 + (v_{\perp y}^\pm)^2}} \times \left\{ 2v_{\parallel y}^\pm \frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} + 2v_{\perp y}^\pm \frac{\partial v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right\}, \quad v_y^\pm \equiv \sqrt{(v_{\parallel y}^\pm)^2 + (v_{\perp y}^\pm)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v_y^\pm}{\partial \tilde{y}^2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\left((v_{\parallel y}^\pm)^2 + (v_{\perp y}^\pm)^2 \right)^{3/2}} \times \left\{ 2v_{\parallel y}^\pm \frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} + 2v_{\perp y}^\pm \frac{\partial v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right\}^2 + \frac{1}{2\sqrt{(v_{\parallel y}^\pm)^2 + (v_{\perp y}^\pm)^2}} \times$$

$$\times \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right)^2 + 2v_{\parallel y}^\pm \frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} + 2v_{\perp y}^\pm \frac{\partial v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right\}. \quad (11)$$

Якщо вирази (11) взяти в точках $\xi_y = \pm 1$ і $\xi_y = \gamma_y^\pm$, то (11) спростуються так, що отримуємо наступні результати:

$$\left. \frac{\partial v_y^\pm}{\partial \tilde{y}} \right|_{\pm 1} = \frac{1}{2\sqrt{(w_{\parallel y}^\pm)^2 + (w_{\perp y}^\pm)^2}} \cdot \left(\left. 2w_{\parallel y}^\pm \cdot \frac{\partial v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right|_{\pm 1} + \left. 2w_{\perp y}^\pm \cdot \frac{\partial v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}} \right|_{\pm 1} \right),$$

$$\left. \frac{\partial^2 v_y^\pm}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\gamma_y^\pm} = 2v_k \left(\left. \frac{\partial^2 v_{\parallel y}^\pm}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\gamma_y^\pm} + \left. \frac{\partial^2 v_{\perp y}^\pm}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\gamma_y^\pm} \right), \quad (12)$$

в яких v_k – швидкість твердого ядра, м/с.

Ця величина визначена в роботі авторів [10] і через громіздкість обчислень тут не наводиться. Так само обчислюються похідні від компонентів v_x^\pm по змінній \tilde{x} . Результат співпадає з (12) з урахуванням заміни індексу «у» і на індекс «х» і величин $w_{\parallel y}^\pm$, $w_{\perp y}^\pm$ на $w_{\parallel x}^\pm$ і $w_{\perp x}^\pm$ (рис. 3). Самі ж перші і другі похідні, що входять в (11) і (12) обчислюються з виразів (8).

З урахуванням вищесказаного для бінгамівської рідини, слід розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі для течії узагальненої і ступеневої рідин. Нижче розглядається поздовжня течія в плоскому каналі як базова, подібно до такої ж течії бінгамівської рідини. Потім розглядаються поздовжньо-поперечна течія в плоскому каналі і поздовжня течія в прямокутному каналі (рис. 4–7).

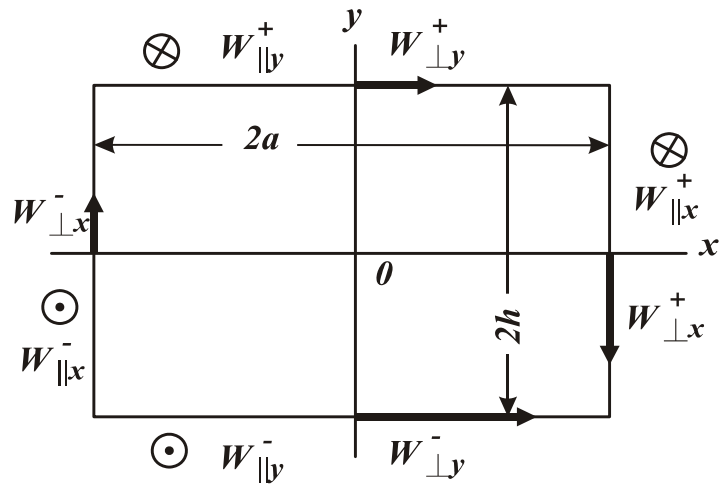


Рис. 4. Прямокутний канал і граничні умови тривимірної течії в каналі:
 $W_{||Y}^{\pm}$ – значення поздовжньої швидкості на стінках каналу; нормальних до осі OY;
 $W_{||X}^{\pm}$ – значення поздовжньої швидкості на стінках каналу; нормальних до осі OX;
 $W_{\perp X}^{\pm}, W_{\perp Y}^{\pm}$ – значення поперечних швидкостей на границях каналу.

Граничні умови для базової задачі куєттовської течії відображені на рис. 5.

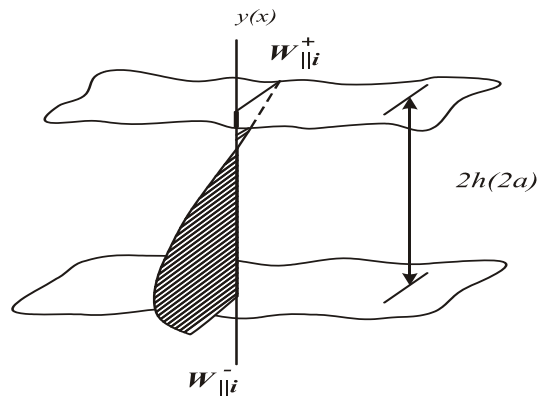


Рис. 5. Фрагмент щілинного каналу та граничні умови:
 $i = x, y$; $i = x$, ширина каналу – $2a$; $i = y$, ширина каналу $2h$

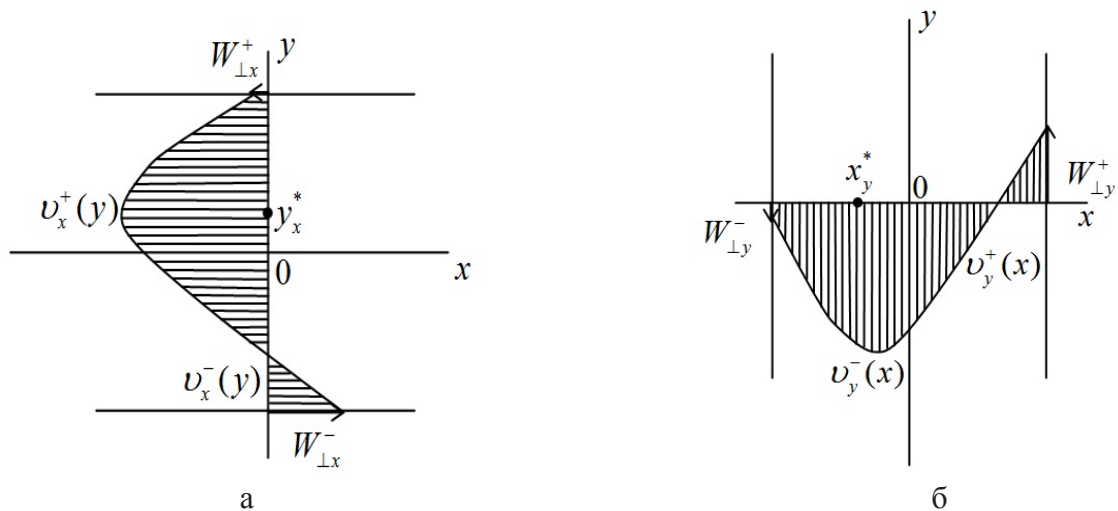


Рис. 6. Поперечна течія в щілинному каналі:
 а – в залежності від координати y, б – в залежності від координати x

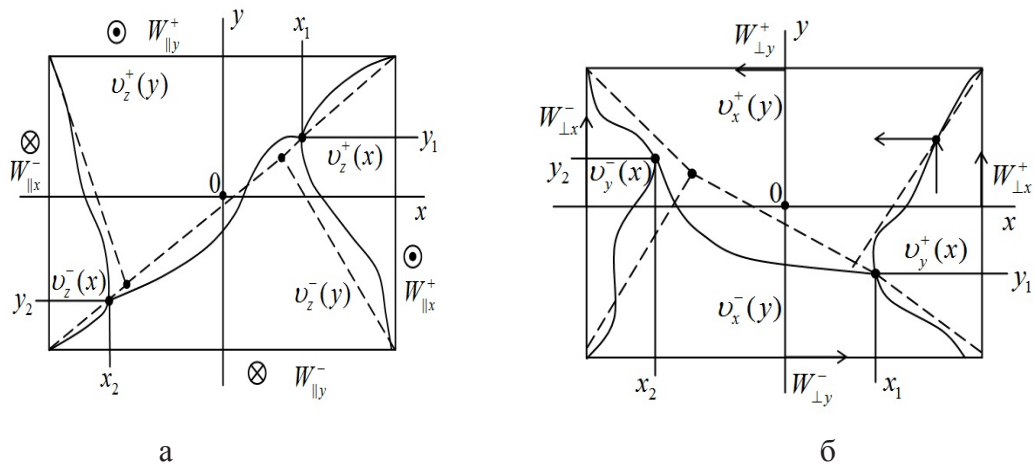


Рис. 7. Розбивка прямокутного каналу і лінеаризація розбивки:
а – для поздовжньої течії; б – для поперечної течії

Виразження для профілю поздовжньої течії в плоскому каналі має такий вигляд [11]:

$$v_z^\pm = \frac{\alpha(h \mp y)}{\beta} + \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{y^* - y}{\beta} \frac{dP}{dz} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \frac{\beta}{dP/dz} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h \mp y^*}{\beta} \frac{dP}{dz} \right) \frac{2}{3} \frac{\beta}{dP/dz} + w^\pm$$

$$y^* = \frac{w^+ - w^-}{\frac{\alpha}{\beta} - 2 \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{h}{\beta} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}}; \quad \mu_{\text{эф}} = \alpha + \beta \sqrt{I_2}, \quad (13)$$

в якому $\mu_{\text{эф}}$ – в'язкість узагальненої рідини $\text{Па} \cdot \text{с}$;

α, β – параметри в'язкості;

w^+ і w^- – швидкості руху стінок каналу, м/с. (див. рис.4);

z – координата уздовж осі каналу, м.

Виразження для швидкості поздовжньо-поперечної течії в плоскому каналі в поздовжньому напрямку мають вигляд, подібний (13), але через те, що в цій течії існують дві компоненти швидкості, величина β змінюється за таким правилом:

$\beta \rightarrow \beta_z = \beta \sqrt{(1 + k^2)}/2$, де величина k залежить від швидкостей на межах каналу таким чином [12].

$$k = \frac{w_\perp^+ - w_\perp^-}{w_{||}^+ - w_{||}^-} \quad (14)$$

де $w_\perp^\pm, w_{||}^\pm$ – швидкості стінок каналу в поздовжньому і поперечному напрямках відповідно.

Величина α в поздовжньо-поперечній течії співпадає з однойменною величиною поздовжньої течії. Поперечна компонента швидкості v_y^+ те ж описується формулою (13), в якій градієнт поздовжнього тиску dP/dz необхідно поміняти на поперечний градієнт dP/dy ; і величину β поміняти на величину β_x за правилом: $\beta \rightarrow \beta_x = \beta \sqrt{(1 + k^2)}/2k^2$. При цьому величина α залишається рівною своєму значенню в поздовжній течії.

Поздовжньо-поперечна течія характеризується двома спеціальними точками y_z^* і y_y^* , вирази для яких виходять з вираження (13) для координати y^* за такими правилами:

$$\begin{aligned} y_z^*(w^+ - w^-, \alpha, \beta, dP/dz) &\rightarrow y_z^*(w_{\parallel}^+ - w_{\parallel}^-, \alpha, \beta_z, dP/dz); \\ y_y^*(w^+ - w^-, \alpha, \beta, dP/dz) &\rightarrow y_y^*(w_{\perp}^+ - w_{\perp}^-, \alpha, \beta_x, dP/dx). \end{aligned}$$

Величина dP/dx визначається з такої формули:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{3}{2} \alpha \frac{w_{\perp}^+ + w_{\perp}^-}{h^2} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta_x} \right)^m + \frac{7}{2} \frac{\beta_x}{h^3} (w_{\perp}^+ - w_{\perp}^-)^2 \left(\frac{\beta_x}{\alpha + \beta_x} \right)^n, \quad (15)$$

у якій m і n - деякі числові параметри, би/р.

Поздовжня течія в прямокутному каналі також будується з профілів швидкості (13) як основних параметрів. Це робиться шляхом кускового розбиття прямокутника поперечного перерізу каналу на підобласті, в яких поздовжня швидкість залежить від координат x і y окремо [13]. Компактний запис вираження для поздовжньої швидкості має такий вигляд:

$$\begin{aligned} v_{zi}^{\pm} &= \frac{\alpha_i}{2\beta_i} (l_i \mp x_i) + \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} \pm \frac{x_i x_i^*}{\beta_i} \frac{dP}{dz} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \frac{\beta_i}{dP/dz} - \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} + \frac{\alpha_i \mp x_i^*}{\beta_i} \frac{dP}{dz} \right)^{3/2} \frac{2}{3} \frac{\beta_i}{dP/dz}; \\ x_i^* &= \frac{w_i^+ - w_i^-}{\frac{\alpha_i}{\beta_i} - 2 \left(\frac{\alpha_i^2}{4\beta_i^2} + \frac{l_i}{\beta_i} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}}; \quad i = y, x; \quad l_i = h, a; \quad x = h/a; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \alpha(1 + \mathcal{J}^2); & \beta_y &= \beta(1 + \mathcal{J}^2)^{3/2} / 2; \\ \alpha_x &= \alpha(1 + 1/\mathcal{J}^2); & \beta_x &= \beta(1 + 1/\mathcal{J}^2)^{3/2} / 2, \end{aligned}$$

у якому a – ширина прямокутного каналу, м.

При обчисленні коефіцієнтів тепловіддачі течій, швидкості яких представлені формулами (13), (14), (15) і (16), необхідно скористатися формулами (5) і при цьому взяти до уваги те, що в плоскому каналі в поздовжньому і поздовжньо-поперечному течіях є два коефіцієнти тепловіддачі, а в прямокутному каналі – чотири коефіцієнти тепловіддачі. У поздовжньо-поперечній течії в плоскому каналі потрібно скласти по теорії Піфагора дві складові дотичної швидкості. Як і для течії бінгамівської рідини обчислення коефіцієнтів тепловіддачі зводиться до обчислення перших похідних швидкості біля меж каналів. Для поздовжньої течії в плоскому каналі значення похідних в точках $y = \pm h$ є рівними:

$$\left. \frac{\partial v^{\pm}}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = \mp \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{h \mp y^*}{\beta} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}. \quad (17)$$

Для поздовжньо-поперечної течії при обчисленні похідних потрібно використати правило знаходження модуля вектора (див. формулу (17) вираження для v_y^{\pm}). У результаті проведення обчислень для похідних є правильними такі вирази:

$$\frac{\partial \tilde{v}^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = \frac{1}{2\sqrt{(w_{\parallel}^{\pm})^2 + (w_{\perp}^{\pm})^2}} \left\{ 2w_{\parallel}^{\pm} \frac{\partial v_z^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} + 2w_{\perp}^{\pm} \frac{\partial v_x^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} \right\},$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_z^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = \mp \frac{\alpha}{2\beta_z} \pm \left(\frac{\alpha^2}{4\beta_z^2} + \frac{h \mp y_z^*}{\beta_z} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}; \quad \beta_z = \beta \sqrt{(1+k^2)/2};$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_x^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = -\frac{\alpha}{2\beta_x} \pm \left(\frac{\alpha^2}{4\beta_x^2} + \frac{h \mp y_x^*}{\beta_x} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}; \quad \beta_x = \beta \sqrt{(1+k^2)/2k^2}.$$

$$y_z^* = \frac{w_{\parallel}^+ - w_{\parallel}^-}{\frac{\alpha}{\beta_z} - 2 \left(\frac{\alpha^2}{4\beta_z^2} + \frac{h}{\beta_z} \frac{dP}{dz} \right)^{1/2}}; \quad (18)$$

$$y_x^* = \frac{w_{\perp}^+ - w_{\perp}^-}{\frac{\alpha}{\beta_x} - 2 \left(\frac{\alpha^2}{4\beta_x^2} + \frac{h}{\beta_x} \frac{dP}{dx} \right)^{1/2}}$$

Обчислення похідних для поздовжньої течії в прямокутному каналі виконується за допомогою формул (16) і зводиться до формул типу (17) з відповідними значеннями α_i , β_i , x_i^* .

Окремо має сенс розглянути обчислення коефіцієнтів тепловіддачі для течії ступеневої рідини. У зв'язку з тим, що цілий ряд теплоносіїв характеризується в'язкістю ступеневої рідини [14]. Через те, що головні моменти обчислень абсолютно подібні до тих, які описувалися стосовно бінгамівської і узагальненої рідинам, нижче розглядається тільки поздовжня течія статечної рідини в плоскому каналі. Вираження для швидкості поздовжньої течії ступеневої рідини з показником n має такий вигляд:

$$v^{\pm} = \left| \frac{y - y^*}{\beta} \cdot \frac{dP}{dz} \right|^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \frac{\beta}{dP/dz} - \left| \frac{h \mp y^*}{\beta} \frac{dP}{dz} \right|^{\frac{n+2}{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \frac{\beta}{dP/dz} + w^{\pm},$$

$$y^* = \frac{w^+ - w^-}{2 \left(\frac{h}{\beta} \frac{dP}{dz} \right)^{\frac{1}{n+1}}}, \quad \mu = \beta \left| \frac{dv^{\pm}}{dy} \right|^n. \quad (19)$$

Обчислення похідної від (19) для коефіцієнта тепловіддачі приводить до такого результату:

$$\frac{\partial v^{\pm}}{\partial y} \Big|_{y=\pm h} = \left(\frac{h \mp y^*}{\beta} \frac{dP}{dz} \right)^{\frac{1}{n+1}}. \quad (20)$$

Представлені результати свідчать про те, що залежність числа Нуссельта від градієнтів тиску (поздовжнього і поперечного) реологічних і геометричних характеристик рідин і

каналів є нелінійною і дуже складною. Для того, щоб зробити цю залежність простішою і наочнішою слід записати вирази для числа Нуссельта для найпростішої течії, тобто для поздовжньої течії в плоскому каналі. Більш складніші з розглянутих вище течій, також мають числа Нуссельта, але числа є більш кількісно, ніж якісно ускладнені.

Вирази для чисел Нуссельта нижче записуються відповідно до формул (5) з точністю до тривіальних множників при похідних швидкості. Для бінгамівської рідини число Нуссельта є пропорціональним наступному вираженню:

$$N_u \sim \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta} \left[1 \mp \frac{\tau_0}{dP/d\zeta} - \frac{(w^+ - w^-)/2h}{dP/d\zeta \cdot (1/\mu) \cdot (1 - \tau_0/dP/d\zeta)} \right] \right\}^{1/3}, \text{ (на стінках)}$$

$$N_u \sim \left(\frac{1}{\mu} \frac{dP}{d\zeta} \right)^{1/4}, \text{ (на межах твердого ядра)} \quad (21)$$

З цього виразу виходить, що перші два числа Нуссельта залежать від трьох параметрів: $(1/\mu)(dP/d\zeta)$; $\tau_0/(dP/dz)$; $(w^+ - w^-)/2h$, останній з яких є кінематичною швидкістю зрушення куєттовської течії ньютонівської рідини.

Для узагальненої рідини вираження для чисел Нуссельта правильним є вираження:

$$N_u \sim \left\{ \pm \frac{\alpha}{2\beta} \pm \left[\frac{\alpha^2}{4\beta^2} \pm \frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \cdot \left(1 \mp \frac{(w^+ - w^-)/2h}{\frac{\alpha}{2\beta} - \left(\frac{\alpha^2}{4\beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \right)^{1/2}} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/3}, \quad (22)$$

З якого видно, що число Нуссельта також залежить від трьох наступних параметрів:

$$\alpha/2\beta ; (1/\beta)(dP/d\zeta); (w^+ - w^-)/2h .$$

Степенева рідина має число Нуссельта, пропорційні такому вираженню :

$$N_u \sim \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \left[1 \mp \frac{(w^+ - w^-)/h}{\left(\frac{1}{\beta} \frac{dP}{d\zeta} \right)^{\frac{1}{n+1}}} \right] \right\}^{\frac{1}{3(n+1)}} \quad (23)$$

в яке входить два такі параметри: $(1/\beta)(dP/d\zeta)$ і $(w^+ - w^-)/2h$.

Висновки

Виходячи з вищевказаного, можна констатувати наступне. Усі представлені результати відносяться до гідродинамічно стабілізованих течій. Числа Нуссельта для бінгамівської рідини та інших неньютонівських рідин на стінках каналів, визначаються по першій похідній швид-

кості від змінної, спрямованої по нормам до стінки. Числа Нуссельта для бінгамівської рідини, які взяті у межах твердого ядра визначаються по другій похідній швидкості по нормам дії межі. Якщо дотична швидкість течії рідини у стінки має дві складові, то швидкість, похідна якої входить до числа Нуссельта, визначається через ці складові відповідно до теореми Піфагора. Числа Нуссельта для бінгамівської і узагальненої рідин залежать від трьох параметрів при поздовжній течії в плоскому каналі. Якщо течія має складніший характер, тобто є двох- чи трьохвимірною, то кількість параметрів зростає так, що ці параметри породжуються кожною компонентою швидкості багатовимірної течії і утворюють між собою усі можливі комбінації.

У подальшому значення чисел Нуссельта дозволяє обчислювати відповідні коефіцієнти тепловіддачі і теплопередачі між неньютонівськими рідинами, в трубах і каналах, і зовнішнім середовищем.

Список літератури

1. Кутателадзе С. С. Теплопередача и гидравлическое сопротивление. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367 с.
2. Кутателадзе С. С. Анализ подобия в теплофизике. – Новосибирск. Наука. Сиб. отд. 1982. – 280 с.
3. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. – М.: Атомиздат. 1979. – 415 с.
4. Уилкинсон У. А. Неньютоновские жидкости. – М.: Мир. 1964. – 216 с.
5. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. – М.: Химия. 1984. – 628 с.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука. ГРФМЛ. –1973. – 848 с.
7. Гиргидов А. Д. Механика жидкости и газа (гидравлика). – СПб.: изд-во Политехнического ин-та. – 2007. – 545 с.
8. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Изд. фирма ФМЛ. Наука. 2001. – 576 с.
9. Білецький Е. В., Толчинський Ю. А. Модель в'язкопластичного бінгамовського плинну в прямокутному каналі // Обладнання та технології харчових виробництв. – 2010. – № 24. – С. 45–54.
10. Білецький Е. В., Толчинський Ю. А. Властивості сімейства функцій для опису в'язкопластичної течії і граничних умов течі // Харчова наука і технологія. – 2010. – № 1(10). – С. 104–105.
11. Билецкий Э. В. Продольное течение бингамовской жидкости с поперечной циркуляцией в прямоугольном канале червячной машины // Теория и практика инновационного развития кооперативного образования и науки: Материалы международной научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава и аспирантов., 14–16 апреля 2010 г. / Билецкий Э. В., Толчинский Ю. А.; Издательство БУПК. – Белгород. – 240 с.

CALCULATION OF HEAT-TRANSFER COEFFICIENTS FOR SOME NON-NEWTONIAN FLUID FLOWS IN PIPES AND DUCTS

E.V. BILETSKIY, Cand.Tech. Scie.
Y.A. TOLCHINSKIY, Cand.Tech. Scie.

The article deals with the problem of heat-transfer for non-Newtonian fluid flows in tubes and ducts. Methods for determining heat-transfer values are proposed for exponential, Bingham and generalized fluids.

Поступила в редакцию 16.12 2011 г.