УДК 519.8 (075.8)
Ю. Є. МЕГЕЛЬ, д-р техн. наук, професор
А. П. РУДЕНКО, канд. техн. наук, доцент
І. В. ДАНІЛКО, асистент
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка, м. Харків
А.І. РИБАЛКА, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНУВАННЯ ПРИБУТКУ ПРИ РОЗШИРЕННІ ВИРОБНИЦТВА

В работе рассматривается математическая модель задачи оптимального планирования периодического использования прибылей на расширение производственных мощностей с целью получения максимума общей прибыли за весь запланированный период и нахождение оптимального плана методом динамического программирования в общем виде. Полученные расчетные формулы позволяют достаточно легко находить оптимальный план для любых значений параметров задачи без применения динамического программирования.

В роботі розглядається математична модель задачі оптимального планування періодичного використання прибутків на розширення виробничих потужностей з метою отримання максимуму загального прибутку за весь запланований період і знаходження оптимального плану методом динамічного програмування у загальному вигляді. Отримані розрахункові формули дозволяють досить легко знаходити оптимальний план для будь-яких значень параметрів задачі без застосування динамічного програмування.

Вступ

Широке використання обчислювальної техніки, як засобу автоматизації інтелектуальної діяльності людини, дозволяє якісно підвищити процедуру прийняття рішень в різних областях виробничої діяльності.

В умовах подальшого розвитку економіки значно зростає актуальність задач оптимального планування розподілу ресурсів з метою підвищення ефективності діяльності підприємств, зокрема оптимального використання прибутку для розширення виробничих потужностей підприємств.

Сформулюємо типову задачу планового розширення площі посівів аграрного підприємства на розрахунковий період тривалістю m наступних років з метою отримання максимального загального прибутку за всі m років, маючи для цього S коштів на початку першого року. На розширення 1 га посівної площі витрачається коштів s, а прибуток з 1 га в кінці року становить c. На початку першого року розрахункового періоду з m років всі кошти S вкладаються в розширення посівної площі, а в кожному наступному році частка x від загального прибутку попереднього року витрачається на розширення посівної площі в наступному році. В роботі [1, 2] наведена подібна задача, в якій знаходять оптимальний план щорічного використання прибутків для розширення виробничої бази в наступних роках за заданий розрахунковий період з конкретними числовими значеннями заданих параметрів, але вона не дає можливості дослідити вплив змін цих параметрів на оптимальний план. Тому в даній роботі розглядається узагальнена модель цієї задачі для дослідження впливу зміни значень заданих параметрів на оптимальний план використання частки щорічних прибутків для розширення виробничої бази підприємств.

Основна частина

Для дослідження поставленої задачі запишемо у загальному вигляді основні розрахункові формули для обчислення площі посівів і прибутків кожного року. В кінці кожного *i*-го року одна частина загального прибутку витрачається на розширення посівів у наступному (*i*+1)-му році на величину:

$$\Delta g_{i+1} = \frac{cg_i x_i}{s} = \beta g_i x_i \,, \tag{1}$$

а друга частина дає чистий прибуток за *i*-й рік:

$$p_i = cg_i(1 - x_i) = cg_{i-1}(1 - x_i)(1 + \beta x_{i-1}) \,, \tag{2}$$

де *s* – вартість витрат на 1 га посівів;

c – прибуток, який отримуємо з одного га площі посівів;

g_i – площа посівів в *i*-му році;

$0 \le x_i \le 1$ – чистий прибуток за черговий *i*-й рік (без суми відрахувань $cg_i x_i$ на розширення посівної площі в наступному (*i*+1)-му році).

Визначаємо площу посівів, враховуючи її розширення (1) в кожному *i*-му (*i*=1,2, ...,*m*) році і чистий прибуток (2) по завершенню кожного року:

$$\begin{gathered}
g_1 = \frac{S}{s},\; p_1 = cg_1(1 - x_1),\; \Delta g_2 = \beta g_1 x_1, \\
g_2 = g_1 + \Delta g_2 = g_1(1 + \beta x_1),\; p_2 = cg_2(1 - x_2) = cg_1(1 - x_2)(1 + \beta x_1) = \beta S(1 - x_2)(1 + \beta x_1), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_i = g_{i-1} + \Delta g_i = g_{i-1}(1 + \beta x_{i-1}) = g_1 \prod_{k=1}^{i-1}(1 + x_k) = \frac{S}{s}\prod_{k=1}^{i-1}(1 + x_k), \Delta g_{i+1} = \beta g_i x_i, \\
p_i = cg_i(1 - x_i) = cg_1(1 - x_i)\prod_{k=1}^{i-1}(1 + x_k) = \beta S(1 - x_i)\cdot\prod_{k=1}^{i-1}(1 + x_k), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
g_m = g_{m-1} + \Delta g_m = g_{m-1}(1 + \beta x_{m-1}) = g_1 \prod_{i=1}^{im-1}(1 + x_i) = \frac{S}{s}\prod_{i=1}^{m-1}(1 + x_i), \\
p_m = cg_m(1 - x_m) = cg_{m-1}(1 - x_m)(1 + \beta x_{m-1}) = cg_1(1 - x_m)\prod_{i=1}^{m-1}(1 + \beta x_i) = \beta S(1 - x_m)\prod_{i=1}^{m-1}(1 + x_i).
\end{gathered} \tag{3}$$

Запишемо загальний прибуток за всі *m* років:

$$P_{1,2,\ldots,m} = \sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{m} cg_i(1 - x_i) = cg_1 \sum_{i=1}^{m}(1 - x_i)\prod_{k=1}^{i-1}(1 + \beta x_k) = \beta S \sum_{i=1}^{m}(1 - x_i)\prod_{k=1}^{i-1}(1 + \beta x_k) \tag{4}$$

Необхідно знайти такі невід'ємні значення вектора невідомих $X = |x_i|_m$, які дають максимум функції (4). Найефективнішим методом знаходження оптимального плану такої задачі є динамічне програмування [3]. Згідно з принципом оптимальності в динамічному програмуванні, процес знаходження оптимального плану X°, який забезпечує максимальний загальний прибуток (4), можна розподілити на ряд послідовних кроків (етапів) по роках, на кожному з яких знаходять так зване умовно-оптимальне управління $X_i^o = (x_i^0, x_{i+1}^0, \cdots)$, яке забезпечує умовний максимум $P(X_i^o)$ загального прибутку на *i*-му і всіх наступних роках до кінця розрахункового періоду з *m* років [4]. Якщо розпочати процес з останнього *m*-го року, то для кожного (*m-k*)-го року (*k*-го кроку, *k*=0,1,2, … ,*m*-1) можна записати умовний (локальний) максимум:

$$P(X_{m-k}^o) = \max(p_{m-k} + p_{m-k-1} + p + p_{m-k-2} + \cdots + p_m) = \max\left[p_{m-k} + P(X_{m-k-1}^o)\right] \tag{5}$$

і умовно-оптимальний план:

$$X^o_{m-k} = (x^o_{m-k}, x^o_{m-k-1}, \ldots, x^o_m) \tag{6}$$

в результаті даного k-го кроку (для (m-k)-го року) і всіх попередніх κ-1, κ-2 ... кроків (відповідно для m-k+1, m-k+2,..., m-го років) цього процесу у відповідності з принципом оптимальності.

Запишемо умовні максимуми і умовно-оптимальні плани послідовно для кожного року, починаючи з останнього m-го року.

Для останнього m-го року (0-й крок):

$$P(X^o_5) = \max(p_m + P_{m+1,\cdots}) = \max cg_m(1 - x_m) + \max P_{m+1,\cdots}. \tag{7}$$

Оскільки після m-го року ніяких відрахувань і прибутків не отримуємо, то максимум P_{m+1}=0. Тому для забезпечення умовного максимуму прибутку за m-й рік потрібно призначити x_m=0. Таким чином,

$$P(X^o_m) = p_m = cg_m. \tag{8}$$

Для (m-1)-го року (1-й крок):

$$\begin{aligned} P(X^o_{m-1}) &= \max\left[p_{m-1} + P(X^o_m)\right] = \max\left[cg_{m-1}(1 - x_{m-1}) + cg_m\right] = \\ & cg_{m-1}\max(2 - x_{m-1} + \beta x_{m-1}) = cg_{m-1}\max\left[2 + (\beta - 1)x_{m-1}\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

З (9) бачимо, що для умовного максимуму (8) потрібно надати x_{m+1}=1 у випадку $\beta > 1$, а при $\beta \le 1$ x_{m+1}=0. Таким чином отримуємо такі можливі умовно-оптимальні управління і прибутки за два останніх (m-1)-й і m-й роки:

$$\begin{aligned} & X^o_{m-1} = (x^o_{m-1}, x^o_m) = (1,0);\ P(X^o_{m-1}) = cg_{m-1}\left[2 + (\beta - 1)\right], \\ & g_m = g_{m-1}(1 + \beta x^o_{m-1}) = g_{m-1}(1 + \beta) \end{aligned} \quad \text{, якщо } \beta > 1, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} & X^o_{m-1} = (x^o_{m-1}, x^o_m) = (0,0);\ P(X^o_{m-1}) = 2cg_{m-1}, \\ & g_m = g_{m-1}(1 + \beta x^o_{m-1}) = g_{m-1}(1 + \beta x^o_{m-1}) = g_{m-1} \end{aligned} \quad \text{, якщо } \beta \le 1. \tag{11}$$

Для (m-2)-го року (2-й крок) і всіх наступних років (попередніх кроків) при визначенні можливих умовно-оптимальних планів:

$$X^o_{m-2}, X^o_{m-3}, \cdots, X^0_1$$

і умовних (локальних) максимумів $P(X^o_{m-2}), P(X^o_{m-3}), \cdots, P(X^o_1)$ потрібно враховувати (10) і (11). Умови, подібні до (10) і (11), будуть і на наступних кроках процесу для (m-2)-го, (m-3)-го, ..., 1-го років. Тому весь процес уявляє собою дерево можливих маршрутів пошуку глобального оптимального плану в залежності від значення β. Розглянемо наступні кроки, починаючи з (m-2)-го року, для випадку (11).

$$\begin{aligned} P(X^o_{m-2}) &= \max\left[p_{m+2} + P(X^o_{m-1})\right] = \max\left[cg_{m-2}(1 - x_{m-2}) + 2cg_{m-1}\right] = \\ & cg_{m-2}\max\left[1 - x_{m-2} + 2(1 + \beta x_{m-2})\right] = cg_{m-2}\max\left[3 + (2\beta - 1)x_{m-2}\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

В залежності від значення β отримуємо з (12) такі можливі умовно-оптимальні плани:

$$X^0_{m-2} = (x^0_{m-2}, x^o_{m-1}, x^0_m) = (1,0,0);\ P\left(X^0_{m-2}\right) = 3cg_{m-2}\left[3 + (2\beta - 1)\right] \quad g_{m-1} = g_{m-2}(1 + \beta x^o_{m-2}) = g_{m-2}(1+\beta), \text{ якщо } \beta > 0{,}5, \quad (13)$$

$$X^o_{m-2} = (x^o_{m-2}, x^o_{m-1}, x^o_m) = (0,0,0);\ P(X^o_{m-2}) = 3cg_{m-2}, \quad g_{m-1} = g_{m-2}(1 + \beta x^o_{m-2}) = g_{m-2} \quad \text{якщо } \beta \le 0{,}5. \quad (14)$$

Для (m-3)-го року (3-го кроку) і всіх наступних років (попередніх кроків динамічного програмування) при визначенні умовно-оптимальних рішень потрібно враховувати (13) і (14). Розглянемо (m-3)-й (3-й крок) і всі наступні роки (попередні кроки) для випадку (14):

$$P(X^o_{m-3}) = \max\left[p_{m-3} + P(X^o_{m-2})\right] = \max\left[cg_{m-3}(1 - x_3) + 3cg_{m-2}\right] = cg_{m-3}\max\left[1 - x_3 + 3(1 + \beta x_{m-3})\right] = cg_{m-3}\max\left[4 + (3\beta - 1)x_{m-3}\right]. \quad (15)$$

В залежності від значення β отримуємо з (15) такі можливі умовно-оптимальні плани:

$$X^0_{m-3} = (x^o_{m-3}, x^o_{m-2}, x^o_{m-1}, x^0_m) = (1,0,0,0);\ P\left(X^0_{m-3}\right) = cg_{m-2}\left[4 + (3\beta - 1)\right], \quad g_{m-2} = g_{m-3}(1 + \beta x^o_{m-3}) = g_{m-3}(1+\beta), \quad \text{якщо } \beta > \frac{1}{3}, \quad (16)$$

$$X^o_{m-3} = (x^o_{m-3}, x^o_{m-2}, x^o_{m-1}, x^o_m) = (0,0,0,0);\ P(X^o_{m-3}) = 4cg_{m-3}, \quad g_{m-2} = g_{m-3}(1 + \beta x^o_{m-3}) = g_{m-3}, \quad \text{якщо } \beta \le \frac{1}{3}. \quad (17)$$

Якщо для кожного з наступних років після (m-k)-го року (m-k+1, m-k+2, … , m-1, m) виконуються умови, подібні до (11), (14), (17), при яких посівна площа протягом цих років не розширюється, тобто

$$g_{i+1} = g_{i+2} = \ldots = g_{m-1} = g_m,\ X^o_i = (0,\ldots,0), X^o_{m-i-1} = (0,\ldots,0),\ X^o_{m-i-2} = (0,\ldots,0),\ \ldots,\ X^o_m = 0,$$

то отримуємо такі умовно-оптимальні рішення:

$$X^0_{m-k} = (x^o_{m-k}, \ldots, x^o_{m-1}, x^0_m) = (1,0,\ldots,0,0);\ P\left(X^0_{m-k}\right) = cg_{m-k}k(\beta+1), \quad g_{m-k+1} = g_{m-k}(1 + \beta x^o_{m-k}) = g_{m-k}(1+\beta), \quad \text{якщо } \frac{1}{k-1} \ge \beta > \frac{1}{k}, \quad (18)$$

$$X^0_{m-k} = (x^o_{m-k}, \ldots, x^o_{m-1}, x^0_m) = (0,0,\ldots,0,0);\ P\left(X^0_{m-k}\right) = (k+1)c\,g_{m-k}, \quad g_{m-k+1} = g_{m-k}(1 + \beta\, x^o_{m-k}) = g_{m-k} \quad \text{якщо } \beta \le \frac{1}{k} \quad (19)$$

Глобальний оптимальний план отримуємо для m-(m-1)=1-го року (m-го кроку). Якщо після 1-го року на всіх наступних роках виконуються умови, подібні до (11), (14), (17), (19), то отримуємо наступне глобальне оптимальне рішення:

$$X^0_1 = (x^o_1, \ldots, x^o_{m-1}, x^0_m) = (1,0,\ldots,0,0);\ P\left(X^0_1\right) = cg_1\left[m + (m-1)\beta - 1\right] = cg_1(m-1)(\beta+1) = (m-1)\beta(\beta+1)S, \quad g_2 = g_1(1 + \beta x^o_1) = g_1(1+\beta) = g_3 = \ldots = g_m \quad \text{якщо } \frac{1}{m} \ge \beta > \frac{1}{m-1}, \quad (20)$$

$$X^0_1 = (x^o_1, \ldots, x^o_{m-1}, x^0_m) = (0,0,\ldots,0,0);\ P\left(X^0_1\right) = cg_1 m = \beta m S, \quad g_2 = g_1(1 + \beta x^o_1) = g_1 = \ldots = g_m, \quad \text{якщо } \beta \le \frac{1}{m-1}, \quad (21)$$

Аналіз формул (7)-(21) показує, що в залежності від значення β можливі два крайніх випадки. У першому з них, який нами розглянуто з початку до кінця, виконується умова (21) а значить і умови (11), (14), (17), (19), тому ніяких відрахувань на розширення площі посівів не здійснюється і глобальний максимум прибутку за m років від незмінної посівної площі g_1 становить:

$$P(X_1^o)=\beta mS,\ X_1^o=(0,\dots,0),\ g_i=g_1=\frac{S}{s},\ i=1,2,\dots m.$$

У другому крайньому випадку виконується умова (10), а значить і умови (13), (16), (18), (20). Розглянемо цей випадок, починаючи з першого кроку ((m-1)-й рік), для якого ми отримали умовно-оптимальне рішення (10):

$$X_{m-1}^o=(x_{m-1}^o,x_m^o)=(1,0);\ P(X_{m-1}^o)=p_{m-1}+P(X_m^0)=cg_{m-1}(1-x_{m-1}+1+\beta x_{m-1})=$$
$$cg_{m-1}(\beta+1),\ \ g_m=g_{m-1}(1+\beta x_{m-1}^o)=g_{m-1}(1+\beta),$$

Для (m-2)-го року (другий крок):

$$X_{m-2}^o=(x_{m-2}^o,\ x_{m-1}^o,x_m^o)=(1,1,0);\ P(X_{m-1}^o)=\max\left[p_{m-2}+P(X_{m-1}^0)\right]=$$
$$cg_{m-2}\max\left[1-x_{m-2}+(1+\beta)(1+\beta x_{m-2})\right]=cg_{m-2}\max\left[2+(\beta^2+\beta-1)x_{m-2}+\beta\right],\qquad(22)$$
$$g_{m-1}=g_{m-2}(1+\beta x_{m-2}^o).$$

Згідно з умовою (10) маємо β>1 і коефіцієнт при x_{m-2}:

$$\beta^2+\beta-1>0,$$

тому умовний максимум (22) на (m-2)-му році досягається при $x_{m-2}=1$

$$P(X_{m-2}^o)=cg_{m-2}\left[2+(\beta^2+\beta-1)+\beta\right]=cg_{m-2}(\beta+1)^2,\ \ g_{m-1}=g_{m-2}(\beta+1).\qquad(23)$$

Для (m-3)-го року (третій крок):

$$X_{m-3}^o=(x_{m-3}^o,\ x_{m-2}^o,\ x_{m-1}^o,x_m^o)=(1,1,1,0);\ P(X_{m-1}^o)=\max\left[p_{m-3}+P(X_{m-2}^0)\right]=$$
$$cg_{m-3}\max\left[1-x_{m-3}+(1+\beta)^2(1+\beta x_{m-3})\right]=cg_{m-3}\max\left\{1+\left[\beta(\beta+1)^2-1\right]x_{m-3}+(\beta+1)^2\right\}.\qquad(24)$$

Згідно умови (10) β>1, тому умовний максимум на 3-му році досягається при x_{m-3}=1:

$$P(X_{m-3}^0)=cg_{m-3}\left[1+\beta(\beta+1)^2-1+(\beta+1)^2\right]=cg_{m-3}(\beta+1)^3$$
$$g_{m-2}=g_{m-3}(1+\beta).\qquad(25)$$

Аналогічно можна показати, що для будь-якого k-го кроку ((m-k)-го року) коефіцієнт при невідомій x_{m-k} завжди буде невід’ємним, якщо виконується умова (10), а умовно-оптимальними рішеннями є:

$$X_{m-k}^o=(1,1,\dots,1,0),\ P(X_{m-k})=g_{m-k}(\beta+1)^k,\ \ g_{m-k-1}=g_{m-k}(\beta+1).\qquad(26)$$

Глобальний оптимальний план знаходимо на останньому (m-1)-му кроці (першому році m-m+1=1):

$$X_1^o=(1,1,\dots,1,0),\ P(X_1^0)=g_1(\beta+1)^{m-1}=\frac{S}{s}(\beta+1)^{m-1},\ \ g_2=g_1(\beta+1)^m\qquad(27)$$

Тобто для глобального максимуму прибутку за всі п’ять років при β>1 потрібно відраховувати в кінці кожного з перших чотирьох років весь прибуток на розширення площі посівів.

Якщо

$$\frac{1}{m-1} < \beta \le 1, \qquad (28)$$

то для отримання оптимального плану на перших роках річні прибутки повністю відраховуються на розширення посівів, а на останніх роках ніяких відрахувань на розширення посівів не виконують. З якого року припиняти відрахування прибутку можна визначити за допомогою умов (11), (14), (17), (19), (21).

Можливі розгалуження для пошуку оптимального плану даної задачі наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Значення β	x_1	x_2		x_{m-k-1}	x_{m-k}	x_{m-k+1}		x_{m-3}	x_{m-2}	x_{m-1}	x_m
β>1	1	1	-	1	1	1	-	1	1	1	0
1≥β>0,5	1	1	-	1	1	1	-	1	1	0	0
0,5≥β>1/3	1	1	-	1	1	1	-	1	0	0	0
- - - - - - - -	- -	- -	-	- -	- -	- -	-	- -	- -	- -	- -
1/(k-1)≥β>1/k	1	1	-	1	1	0	-	0	0	0	0
- - - - - - - - -	- -	- -	-	- -	- -	- -	-	- -	- -	- -	- -
1/(m-2)≥β>1/(m-1)	1	1	-	0	0	0	-	0	0	0	0
1/m≥β>1/(m-1)	1	0	-	0	0	0	-	0	0	0	0
β≤1/(m-1)	0	0	-	0	0	0	-	0	0	0	0

Розглянемо розрахунки оптимального плану за умовою (27), наприклад для (m-k)-го року:

$$\frac{1}{k-1} \ge \beta > \frac{1}{k}, \ 1 < k \le m \qquad (29)$$

У цьому випадку умовно-оптимальний план для (m-k)-го року знаходимо за допомогою (18):

$$\begin{gathered} X^0_{m-k} = (x^o_{m-k}, \dots, x^o_{m-k}, \dots, x^0_m) = (1,\, 0, \dots, 0, 0);\ P\left(X^0_{m-k}\right) = cg_{m-k}(\beta x_{m-k-1} + 1), \\ g_{m-k+1} = g_{m-k}(1 + \beta x^o_{m-k}) = g_{m-k}(1+\beta) = g_{m-k+2} = \dots = g_m. \end{gathered} \quad .(30)$$

Для k-го і всіх попередніх m-(k+1), m-(k+2), ..., m-(k+l),...,1 років x_{m-k-l} =1, а для всіх наступних років m-(k-1), m-(k-2),..., m-(k-r), ..., m після k-го року x_{m-k+r} =0. Тому відповідно з (18) глобальний максимум можна записати так:

$$\begin{gathered} P(X^o_1) = kcg_{m-k} = kcg_1(1+\beta)^{m-k} = k\beta S(1+\beta)^{m-k}, \\ g_m = g_{m-1} = \dots = g_{m-k} = g_{m-k-1}(1+\beta) = g_1(\beta+1)^{m-k} = \frac{S}{s}(\beta+1)^{m-k}. \end{gathered} \qquad (31)$$

Таким чином послідовно виконуючи обчислення по узагальнених формулах (7)-(31) для будь яких значень заданих параметрів задачі знаходимо в загальному вигляді глобальний оптимальний план відрахувань щорічних прибутків на розширення площі посівів, оптимальні площі посівів на кожен рік і максимально можливий загальний чистий прибуток, який можна отримати за задану кількість років. Але для будь-яких заданих конкретних числових значень параметрів m, s, c не треба виконувати весь алгоритм динамічного програмування, тому що за допомогою табл. 1 і виразу (31) можна відразу знайти значення $k°$, оптимальний план відрахувань X^o і максимально-можливий загальний прибуток за всі роки.

Наведемо приклад [5] знаходження оптимального плану для заданих числових значень параметрів задачі m=5, s=10, c=4. Обчисливши значення β:

$$\frac{1}{3} < \beta = \frac{c}{s} = 0{,}4 \le \frac{1}{2}. \qquad (32)$$

знаходимо по табл. 1 значення k=3, оптимальні значення вектора частин відрахувань x_i щорічних прибутків:

$$X^0 = \left(x_1^o, x_2^o, x_3^o, x_4^o, x_5^0\right) = (1,1,0,0,0), \qquad (33)$$

і оптимальні площі посівів на кожен рік:

$$g_1^o = \frac{S}{s} = 0{,}1S; \quad g_2^o = g_1^o + \Delta g_2 = g_1^0(1+\beta x_1^o) = 0{,}14S,$$

$$g_3^0 = g_2^o + \Delta g_2 = g_2^o(1+\beta x_2^o) = 0{,}196S; \; g_4^o = g_3^o + \Delta g_4 = g_3^0(1+\beta x_3^o) = 0{,}196S;$$

$$g_5^o = g_4^o + \Delta g_5 = g_4^o(1+\beta x_4^o) = 0{,}196S,$$

які забезпечують максимальний загальний прибуток за всі 5 років, обчислений згідно (31):

$$P(X_1^o) = (k^0+1)\beta S(1+\beta)^{m-k^o} = 2{,}352 \cdot S, \qquad (34)$$

Для забезпечення максимального прибутку в розмірі 2,352 S в цьому прикладі потрібно в кінці першого і другого років прибутки за рік повністю вкладати у розширення посівів (x_1=1, x_2=1) на наступні роки, а в кінці кожного з наступних років (3-го, 4-го, 5-го) кошти від прибутків за кожен з цих років не потрібно вкладати ніяких коштів в розширення посівів (x_3=x_4=x_5=0). Таке ж значення (34) ми отримаємо, якщо скористатись (4):

$$P_{1,2,\dots,5} = \beta S \sum_{i=1}^{5}(1-x_i^0)\prod_{k=1}^{i-1}(1+\beta x_k^o) =$$

$$\beta S\left[\begin{array}{l}(1-x_1^o)+(1-x_2^o)(1+\beta x_1^o)+(1-x_3^o)(1+\beta x_1^o)(1+\beta x_2^o)+ \\ (1-x_4^o)(1+\beta x_1^o)(1+\beta x_2^o)(1+\beta x_3^o)+(1-x_5^o)(1+\beta x_1^o)(1+\beta x_2^o)(1+\beta x_3^o)(1+\beta x_4^o)\end{array}\right]. \qquad (35)$$

Підставивши в (34) значення оптимального плану (32) і β=0,4 отримуємо (33).

Якщо задане значення β, то оптимальний план X^o можна знайти і без табл. 1.

З (29) знаходимо:

$$\frac{1}{\beta} < k^o \le 1 + \frac{1}{\beta}, \qquad (36)$$

і оптимальний план $x_1^o = 1,\ x_2^o = 1, \cdots, x_{m-k}^o = 1,\ x_{m-k+1}^o = 0, \cdots, x_m^o = 0$. Для наведеного прикладу (32) маємо:

$$\frac{1}{0{,}4} = 2{,}5 < k^o \le \frac{1+0{,}4}{0{,}4} = 3{,}5,$$

k° =3, тому що k° може бути тільки цілим числом, оптимальний план (33) і максимальний прибуток (34).

Для оперативного оцінювання впливу основних параметрів задачі на оптимальний план слід скористатись електронною таблицею Excel, розрахунковий аркуш якої наведено в табл.2 для значень параметрів наведених у розглянутому прикладі.

Таблиця 2

	c=	4	*s*=	10	*S*=	10000	***β*=**	**0.4**	*m*=	**5**
	1/(*k*-1)	0.5	1/*k*=	0.333	***k*=**	**3**				
X°	***x*°(1)=**	**1**	***x*°(2)=**	**1**	***x*°(3)=**	**1**	***x*°(4)=**	**0**	***x*°(5)=**	**0**
G°	*g*°(1)=	1000	*g*°(2)=	1400	*g*°(3)=	1960	*g*°(4)=	2744	*g*°(5)=	2744
Pmax=	23520									

В табл. 3 наведені розрахунки оптимальних планів для даного прикладу при зміні значення β від 0,1 до 1,2 і незмінних значеннях m=5, S=10000.

Таблиця 3

β	k	$X°$	$G°$	P_{max}
0,1	5	0, 0, 0, 0, 0	1000,1000,1000,1000,1000	5000
0,2	5	0, 0, 0, 0, 0	1000,1000,1000,1000,1000	10000
0,3	5	0, 0, 0, 0, 0	1000,1000,1000,1000.1000	15000
0,4	3	1, 1, 0, 0, 0	1000,1400,1960,1960,1960	23520
0,5	2	1, 1, 0, 0, 0	1000,1500,2250,3375,3375	33750
0,6	2	1, 1, 1, 0, 0	1000,1600,2560,4096,4096	49152
0,7	2	1, 1, 1, 0, 0	1000,1700,2890,4913,4913	68782
0,8	2	1, 1, 1, 0, 0	1000,1800,3240,5832,5832	93312
0,9	2	1, 1, 1, 0, 0	1000,1900,3610,6859,6859	123462
1	2	1, 1, 1, 0, 0	1000, 2000,4000,8000,8000	160000
1,2	1	1, 1, 1, 1, 0	1000,2200,4840, 10648, 10648	281107

Висновки

Наведена у даній роботі узагальнена модель задачі дає можливість швидко знаходити оптимальні плани періодичних відрахувань прибутку, користуючись простими співвідношеннями між основними параметрами, не вдаючись до громіздкого і досить складного динамічного програмування. Це дозволяє оперативно виконувати аналіз задачі і приймати науково обґрунтовані плани інвестування розвитку підприємств. Дана методика пошуку оптимальних рішень може бути поширена і на більш складні подібні задачі, у яких деякі параметри можуть змінюватися з кожним роком та задачі, у яких потрібно знаходити оптимальні плани розвитку декількох підприємств.

Список літератури

1. Методы и средства принятия решений в социально-экономических и технических системах / Е. Г. Петров, М. В. Новожилова. – Херсон: ОЛДИ-плюс, 2003. – 270 с.

2. Акулич И. Л. Экономико-математические методы и модели. Компьютерные технологии и решения. – Минск: БГЭУ, 2003. – 319 с.

3. Аналіз методів пошуку оптимальних планів розширеної задачі призначень / Ю. Є. Мегель, А. П. Руденко, А. Ю. Гайдусь // Системи обробки інформації. − Харків, 2010. − Вип. 1(13). − С. 108−116.

4. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій. – Київ: ЗАТ „ВІПОЛ”, 2000. – 688 с.

5. Математичне програмування / О. В. Ульянченко, М. Т. Лебідь, Г. Г. Хлівняк, В. О. Бабенко. – Київ, 2002. – 295 с.

GENERALIZED MODEL FOR OPTIMAL PLANNING OF INCOME DURING PRODUCTION EXTENSION

A.P. RUDENKO, Cand. Scie. Tech., Yu.E. MEGEL, Dr. Scie. Tech.
I.V. DANILKO, assistant, A.I. RYBALKA, Cand. Scie. Phys.-mathem.

Given mathematical model generate optimum plan for the periodic pays from the income, using simple ratios of main parameters. This can be done without bulky and complex dynamic programming. It allows executions of fast analyze tasks and making scientifically grounded plans of investment in production developments. Given method can be applied for similar tasks of greater complexity, where some parameters can vary each year or it can be used for many production sites at once.

Поступила в редакцию 24.06 2010 г.