

УДК 621.3.01, 621.315

П. Я. ПРИДУБКОВ, канд. техн. наук, доцент

Українська державна академія залізничного транспорту, м. Харків

І. В. ХОМЕНКО, канд. техн. наук, доцент

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПРОЦЕСІВ ІДЕАЛЬНОГО ТРАНСФОРМАТОРА

*Рассмотрены режимы холостого хода и короткого замыкания линейного трансформатора без потерь, разработан алгоритм процесса приведения напряжений и токов (параметров) вторичной обмотки трансформатора к первичной обмотке, выведены уравнения, описывающие схему замещения идеального трансформатора, установлена схема замещения.*

*Розглянуті режими холостого ходу і короткого замикання лінійного трансформатора без втрат, розроблений алгоритм процесу приведення напруг і струмів (параметрів) вторинної обмотки трансформатора до первинної обмотки, виведені рівняння, що описують схему заміщення ідеального трансформатора, встановлена схема заміщення.*

### Вступ

Трансформатор є унікальним і одним з найпоширеніших електротехнічних пристроїв. Перед усім він використовується як пристрій, що здійснює перетворення змінної напруги у багатьох системах транспорту та зв'язку [1]. У електроенергетичних системах та мережах силові трансформатори з'єднують різні класи напруги та використовуються для передавання електроенергії на великі відстані. Все це обумовлює високі вимоги по надійності, що висуваються до трансформаторного обладнання.

В загальному випадку трансформатор представляє собою систему двох або декількох індуктивно зв'язаних котушок, тобто обмоток, розташованих на загальному сердечнику. Як правило, сердечник виконується з феромагнітного матеріалу з високою магнітною проникністю  $\mu$ . Якщо сердечники трансформаторів знаходяться в лінійному режимі [2], тоді  $\mu = const$ . Знаходять застосування також трансформатори з сердечником з неферомагнітного матеріалу ( $\mu = 1$ ). Такі трансформатори застосовуються при високих частотах, а у ряді спеціальних вимірювальних пристроях і при низьких частотах змінного струму.

Вищезгадані трансформатори мають лінійні характеристики й процеси в них можуть бути описані лінійними рівняннями. Таким чином, основні риси робочого режиму даних трансформаторів виявляються при розрахунках, що припускають лінійність [3].

Схеми заміщення лінійних трансформаторів, складені для приведених струмів і напруг відповідно до еквівалентного кола з усунутими індуктивними зв'язками, мають найбільше практичне значення. Втім електрична схема без індуктивних зв'язків, тобто схема заміщення лінійного трансформатора, описувана у підручниках ТОЕ [1–4], не рівнозначна процесам, що відбуваються в трансформаторі. Ця схема є простою електричною схемою, тому напрямку струмів у її вітках визначається напрямком діючої на вході трансформатора напруги. Якщо виконується ця відповідність [4], то рівняння, складене по другому закону Кірхгофа для вторинної обмотки трансформатора, неідентичне такому ж рівнянню, що описує електромагнітні процеси вихідного контуру схеми заміщення. В іншому випадку [1,3], напрямку струму, який протікає через вітку, що містить навантаження, протилежний напрямку дії вхідної напруги.

Тому дослідження схеми заміщення лінійного трансформатора без індуктивних зв'язків з метою усунення її протиріччя електромагнітним явищам, що відбуваються в

трансформаторі, є досить актуальною проблемою, рішення якої дозволить підвищити ефективність розробок пристроїв багатьох електротехнічних систем.

### Основна частина

Аналіз електромагнітних процесів, що відбуваються в ідеальному двохобмотувальному трансформаторі (рис.1), тобто в трансформаторі без втрат, спрощує дослідження, не роблячи істотного впливу на точність опису даних явищ.

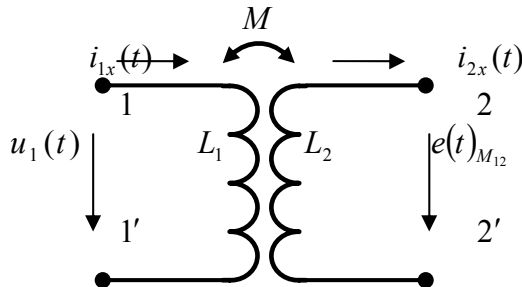


Рис. 1. Аналіз електромагнітних процесів в ідеальному двохобмотувальному трансформаторі

У режимі холостого ходу, напруга  $u_1(t)$ , прикладена до первинної обмотки трансформатора, урівноважується е. р. с.  $e_{L_1}(t) = -\frac{d\psi_{L_1}}{dt} = -L_1 \frac{di_{1x}}{dt}$  самоіндукції, індукованої в даній обмотці відповідно до закону електромагнітної індукції. Потокозчеплення, обумовлене струмом первинної обмотки, наводить у вторинній обмотці е. р. с.  $e(t)_{M_{12}} = -\frac{d\psi_{M_{12}}}{dt} = -M \frac{di_{1x}}{dt}$  взаємоіндукції, причому  $i_{2x}(t) = 0$ . Рівняння по другому закону Кірхгофа для первинної обмотки в миттєвих значеннях має наступний вигляд

$$u_1(t) + e_{L_1}(t) = 0. \tag{1}$$

Оскільки:

$$e_{L_1}(t) = -\frac{d\psi_{L_1}}{dt} = -L_1 \frac{di_{1x}}{dt},$$

то:

$$u_1(t) - L_1 \frac{di_{1x}}{dt} = 0,$$

або:

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_{1x}}{dt}.$$

В символічній формі, для комплексних величин ті ж рівняння виглядають таким чином:

$$\dot{U}_1 + \dot{E}_{L_1} = 0,$$

або:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_{1x}. \tag{2}$$

Отже напруга  $\dot{U}_1$ , прикладена до первинної обмотки трансформатора, та е. р. с.  $\dot{E}_{L_1}$ , що її урівноважує, у режимі холостого ходу рівні по величині, але протилежні по напрямку. Крім того, струм  $\dot{I}_{1x}$  відстає від напруги  $\dot{U}_1$  на  $90^\circ$ .

При замиканні накоротко вторинної обмотки (рис. 2) у ній наводиться е. р. с.  $e_{M_{12}}$  взаємоіндукції, яка обумовлена струмом  $i_{1x}(t)$ , що протікає в первинній обмотці. Дана е. р.

с. є сторонньою для вторинної обмотки трансформатора, на підставі закону Фарадея вона визначається виразом:

$$e_{M_{12}} = -\frac{d\psi_{M_{12}}}{dt} = -M \frac{di_{1к3}}{dt}.$$

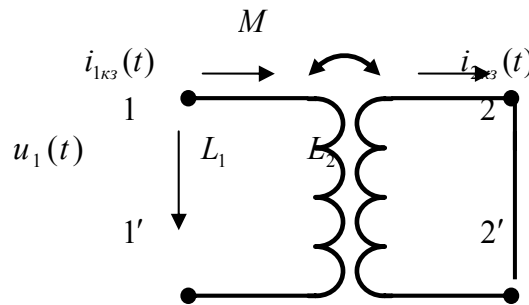


Рис 2. Замикання накоротко вторинної обмотки

Її дія врівноважується е. р. с. самоіндукції вторинної обмотки:

$$e_{L_2}(t) = -\frac{d\psi_{L_2}}{dt} = -L_2 \frac{di_{2к3}}{dt}.$$

Рівняння другого закону Кірхгофа в миттєвих значеннях для вторинної обмотки описується наступним виразом :

$$e_{M_{12}}(t) + e_{L_2}(t) = 0,$$

або:

$$-M \frac{di_{1к3}}{dt} - L_2 \frac{di_{2к3}}{dt} = 0,$$

тобто:

$$-M \frac{di_{1к3}}{dt} = L_2 \frac{di_{2к3}}{dt}. \tag{3}$$

У комплексній формі:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{M_{12}} + \dot{E}_{L_2} &= 0; \\ -j\omega M \dot{I}_{1к3} - j\omega L_2 \dot{I}_{2к3} &= 0 \\ -j\omega M \dot{I}_{1к3} &= j\omega L_2 \dot{I}_{2к3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Струм  $i_2(t)$  вторинної обмотки індукує у первинній обмотці е. р. с.  $e_{M_{21}} = -\frac{d\psi_{M_{21}}}{dt} = -M \frac{di_{2к3}}{dt}$  взаємоіндукції, що є сторонньою для первинної обмотки. Тому рівнянню по другому закону Кірхгофа для первинної обмотки в миттєвих значеннях відповідає виразом:

$$u_1(t) + e_{M_{21}} = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt}, \text{ тобто } u_1(t) - M \frac{di_{2к3}}{dt} = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt},$$

або в комплексній формі:

$$\dot{U}_1 - j\omega M \dot{I}_{2к3} = j\omega L_1 \dot{I}_{1к3}. \tag{5}$$

Таким чином, система рівнянь ідеального трансформатора в режимі короткого замикання в миттєвих значеннях має такий вигляд:

$$\begin{cases} u_1(t) + e_{M_{21}} = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt} \\ e_{M_{12}}(t) = L_2 \frac{di_{2к3}}{dt} \end{cases}$$

або:

$$\begin{cases} u_1(t) - M \frac{di_{2к3}}{dt} = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt} & (6) \\ -M \frac{di_{1к3}}{dt} = L_2 \frac{di_{2к3}}{dt} & (7) \end{cases}$$

У комплексній формі:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 + \dot{E}_{M_{21}} = j\omega L_1 \dot{I}_{1к3} & (8) \\ \dot{E}_{M_{12}} = j\omega L_2 \dot{I}_{2к3} & (9) \end{cases}$$

З рівняння (3) у миттєвих значеннях другого закону Кірхгофа для вторинної обмотки слід записати:

$$\frac{di_{2к3}}{dt} = -\frac{M}{L_2} \frac{di_{1к3}}{dt}.$$

Підставляючи отримане значення похідної струму  $i_{2к3}(t)$  в рівняння (6) другого закону Кірхгофа для первинної обмотки одержимо вираження, що описує процес приведення параметрів вторинної обмотки трансформатора до його первинної:

$$u_1(t) + \frac{M^2}{L_2} \frac{di_{1к3}}{dt} = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt}, \text{ або } u_1(t) = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_{1к3}}{dt}.$$

Тому що  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , то:

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_{1к3}}{dt} - k^2 L_1 \frac{di_{1к3}}{dt},$$

Отже, рівняння в миттєвих значеннях для наведеної схеми заміщення трансформатора має вигляд:

$$u_1(t) = L_1 (1 - k^2) \frac{di_{1к3}}{dt}.$$

У комплексній формі воно може бути представлено наступним виразом:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 (1 - k^2) \dot{I}_{1к3}. \quad (10)$$

З огляду на те, що  $0 \leq k \leq 1$  можна констатувати, що вхідний опір трансформатора в режимі короткого замикання носить індуктивний характер, тому струм  $\dot{I}_{1к3}$  відстає від напруги  $\dot{U}_1$ , прикладеної до затисків первинної обмотки, на  $90^\circ$ .

Тому що:

$$e_{M_{12}}(t) = -M \frac{di_{1к3}}{dt} = L_2 \frac{di_{2к3}}{dt},$$

або в комплексній формі:

$$\dot{E}_{M_{12}} = -j\omega M \dot{I}_{1к3} = j\omega L_2 \dot{I}_{2к3},$$

то струм  $\dot{I}_{2к3}$  протилежно спрямований щодо струму  $\dot{I}_{1к3}$ , а е. р. с.  $\dot{E}_{M_{12}}$  відстає від струму  $\dot{I}_{1к3}$  на  $90^\circ$ .

Відповідно до закону електромагнітної індукції:

$$e_{M_{21}} = -\frac{d\psi_{M_{21}}}{dt} = -M \frac{di_{2кз}}{dt},$$

або в комплексній формі:

$$\dot{E}_{M_{21}} = -j\omega M \dot{I}_{2кз},$$

і, таким чином, струм  $\dot{I}_{2кз}$  випереджає на  $90^\circ$  е. р. с.  $\dot{E}_{M_{21}}$ , що збігається по напрямку з напругою  $\dot{U}_1$ , але має протилежний напрямок відносно е. р. с.  $\dot{E}_{M_{12}}$ .

Векторна діаграма напруг і струмів ідеального трансформатора в режимі короткого замикання вторинної обмотки зображена на рис. 3.

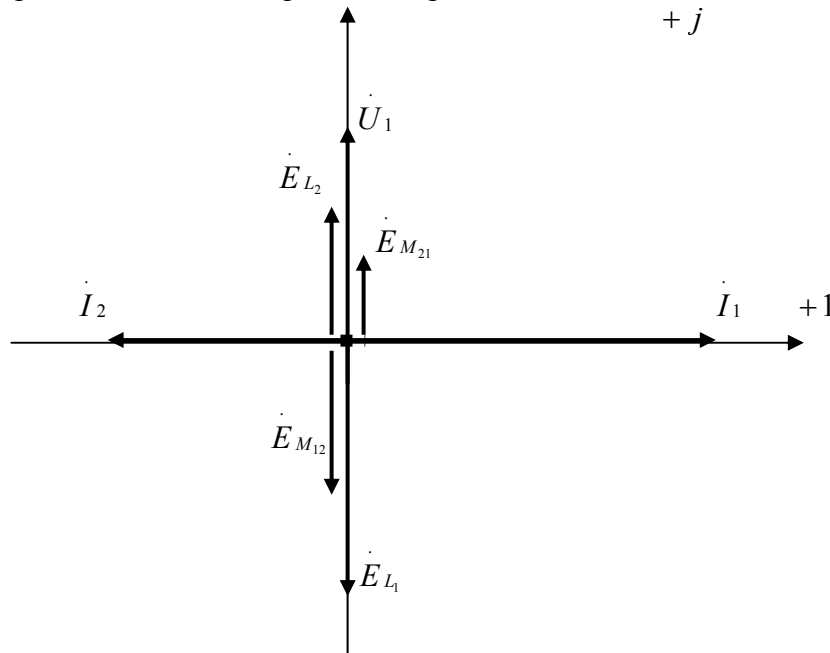


Рис. 3. Векторна діаграма напруг і струмів ідеального трансформатора в режимі короткого замикання вторинної обмотки

Для перетворення схеми трансформатора в еквівалентну схему, що не містить індуктивних зв'язків, необхідно привести струми й напруги вторинної обмотки до первинного, зробивши наступні перетворення. По-перше, з лівої й правої частин рівняння (8) треба відняти відповідно ліву й праву частини рівняння (9), тобто:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + \dot{E}_{M_{21}} &= j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} \\ - \\ \dot{E}_{M_{12}} &= j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} \\ \hline \dot{U}_1 + \dot{E}_{M_{21}} - \dot{E}_{M_{12}} &= j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} - j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} \end{aligned} \quad (11)$$

Отримане рівняння (11) описує процес приведення параметрів вторинної обмотки трансформатора до первинного, тобто до схеми, що виключає магнітні зв'язки, тому в ньому е. р. с.  $\dot{E}_{M_{12}}$  і  $\dot{E}_{M_{21}}$  слід замінити падіннями напруги, що врівноважують ці е. р. с., з огляду на те, що  $j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} = -j\omega M \dot{I}_{1кз}$ , тоді

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} + j\omega M \dot{I}_{1кз} - j\omega M \dot{I}_{1кз} + j\omega M \dot{I}_{2кз}. \quad (12)$$

Здійснивши скорочення в рівнянні (12) і врахувавши, що  $\dot{I}_{2кз} = -\frac{M}{L_2} \dot{I}_{1кз}$ , а так само,

що  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , одержуємо:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} - j\omega \frac{M^2}{L_2} \dot{I}_{1кз}, \text{ або } \dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} - j\omega \frac{k^2 L_1 L_2}{L_2} \dot{I}_{1кз}.$$

Таким чином:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 (1 - k^2) \dot{I}_{1кз},$$

що відповідає рівнянню (10), яке описує наведену схему заміщення трансформатора, тобто вираження (12) еквівалентно рівнянню (10).

Згрупувавши відповідним чином праву частину рівняння (12) одержуємо:

$$\dot{U}_1 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_{1кз} - j\omega M(\dot{I}_{1кз} - \dot{I}_{2кз}). \quad (13)$$

По-друге, для одержання еквівалентної схеми трансформатора до лівої й правої частин рівняння (8) додати відповідно ліву й праву частини рівняння (9):

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 + \dot{E}_{M21} &= j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} \\ + \\ \dot{E}_{M12} &= j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} \\ \hline \dot{U}_1 + \dot{E}_{M21} + \dot{E}_{M12} &= j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} + j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} \end{aligned} \quad (14)$$

Замінімо е. р. с.  $\dot{E}_{M12}$  і  $\dot{E}_{M21}$  падіннями напруги, що їх врівноважують:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_{1кз} + j\omega M \dot{I}_{1кз} + j\omega L_2 \dot{I}_{2кз} + j\omega M \dot{I}_{2кз}. \quad (15)$$

З огляду на те, що  $\dot{I}_{2кз} = -\frac{M}{L_2} \dot{I}_{1кз}$  й  $M = k\sqrt{L_1 L_2}$ , а так само зробивши відповідні перетворення в рівнянні (15), одержуємо:  $\dot{U}_1 = j\omega L_1 (1 - k^2) \dot{I}_{1кз}$ , тобто вираження (15) відповідає наведеній схемі заміщення трансформатора.

Після елементарних перетворень вираження (15) можна представити:

$$\dot{U}_1 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_{1кз} + j\omega(L_2 + M)\dot{I}_{2кз} \quad (16)$$

Враховуючи, що струм, що намагнічує

$$\dot{I}_\mu = \dot{I}_{1кз} - \dot{I}_{2кз}, \quad (17)$$

з отриманих рівнянь (10), (11) і (12) складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_{1кз} - j\omega M(\dot{I}_{1кз} - \dot{I}_{2кз}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = j\omega(L_1 + M)\dot{I}_{1кз} + j\omega(L_2 + M)\dot{I}_{2кз} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \dot{I}_\mu = \dot{I}_{1кз} - \dot{I}_{2кз} \end{cases} \quad (20)$$

Даній системі рівнянь відповідає наступна схема заміщення трансформатора без індуктивних зв'язків (рис. 4).

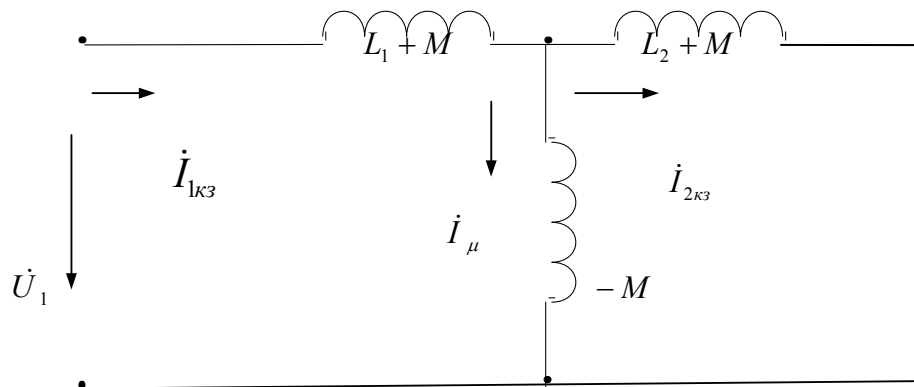


Рис 4. Схема заміщення трансформатора без індуктивних зв'язків

### Висновки

Якщо порівняти отриману схему з еквівалентною схемою заміщення трансформатора, що приведена у посібниках по ТОЕ, Електричним машинам та Електроенергетичним системам та мережам, можна відзначити, що в розглянутій схемі, у відмінності від аналогів, що рекомендується, індуктивності  $L_1$  й  $L_2$  збільшуються на величину  $M$  взаємодуктивності, а індуктивність вітки, що намагнічує, дорівнює  $-M$ . Для отриманої схеми заміщення відповідно до правила розкиду:  $I_{2кз} = I_{1кз} \frac{-j\omega M}{j\omega(L_2 + M)} = -I_{1кз} \frac{M}{L_2 + M}$ , тобто орієнтація струмів  $I_{1кз}$  й  $I_{2кз}$  відповідає рівнянню (4) і енергетичним процесам, що протікають у трансформаторі. У той же час, у загальновизнаній схемі заміщення трансформатора орієнтація даних струмів суперечить основним законам електротехніки.

### Список литературы

1. Зевеке Г. В. и др.. Основы теории цепей. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
2. Калантаров П. Л., Нейман Л. Р. Теоретические основы электротехники. –Л.– М.: ГОСЭНЕРГОИЗДАТ, 1951. – 464 с.
3. Нейман Л. Р. Демирчан К. С. Теоретические основы электротехники. Том 1. Теория линейных электрических цепей. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 536 с.
4. Поливанов К. М. Теоретические основы электротехники. Т. 1. Линейные электрические цепи с сосредоточенными постоянными. – М.: Энергия, 1972. – 240 с.

## ABOUT THE CHARTS OF SUBSTITUTION OF IDEAL TRANSFORMER

P.Y PRIDUBKOV, Cand. Tech. Scie.

I. V. KHOMENKO, Cand. Tech. Scie.

*The modes of idling and short circuit of linear transformer without the losses are considered, the algorithm of process of adduction of tensions and currents (parameters) of the second puttee of transformer to the primary puttee is developed, equalizations are shown out, describing the chart of substitution of ideal transformer, the chart of substitution is set.*

*Поступила в редакцию 18.10 2010 г.*