УДК 519.653

А. В. Майстренко, А. А. Светлаков, А. Г. Гарганеев
Томский государственный университет управления и радиоэлектроники, г. Томск

ЦИФРОВОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА, И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ И КОНТРОЛЯ В СИЛОВОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ

В данной работе предложен и исследован новый оригинальный способ цифрового дифференцирования сигналов, предназначенный для использования в реальном масштабе времени. Способ основан на применении интегральных уравнений Вольтерра I рода. Приведены некоторые результаты экспериментальных исследований, иллюстрирующие его работоспособность и пригодность для использования в системах автоматического управления реального времени.

Ключевые слова: *дифференцирование, интегральное уравнение, регуляризация, матрица.*

В даній роботі запропоновано і досліджено новий оригінальний спосіб цифрового дифференцирова-ня сигналів, призначений для використання в реальному масштабі часу. Спосіб заснований на застосуванні інтегральних рівнянь Вольтерра I роду. Наведено деякі результати експери-ментальних досліджень, що ілюструють його працездатність і придатність для вик-ня в системах автоматичного керування реального часу.

Ключові слова: *диференціювання, інтегральне рівняння, регуляризация, матриця*

1. Введение

Бурные темпы развития современной микропроцессорной техники, открывают широкие возможности для разработки новых и совершенствования существующих алгоритмов решения прикладных задач в реальном времени. Наглядным примером подобных задач может служить задача цифрового дифференцирования сигналов (ЦДС), измеряемых в реальном времени. С данной задачей приходится сталкиваться в отраслях науки и техники, связанных с математическим моделированием динамических процессов и объектов, описываемых дифференциальными уравнениями, с автоматизацией управления и регулирования данными процессами и др.

Особенность обсуждаемой задачи ЦДС состоит в том, что она относится к классу некорректных задач [1]. Данная особенность и актуальность задачи ЦДС стимулируют проведение дальнейших исследований с целью создания таких методов и алгоритмов её решения, которые позволяли бы получать достаточно точные и робастные оценки их производных и были бы доступными для реализации современными средствами микропроцессорной техники.

В данной работе рассматривается один из методов ЦДС в реальном масштабе времени, основанный на использовании интегральных уравнений В.Вольтерра I рода [2], и оригинальный способ его регуляризации, позволяющий существенно повысить устойчивость вычисляемой производной сигнала к ошибкам его задания. Робастность и эффективность предлагаемого способа ЦДС и его регуляризации иллюстрируются результатами численного моделирования.

2. Постановка задачи ЦДС в реальном масштабе времени и укрупненная классификация методов её решения.

Математическую постановку задачи ЦДС составляют следующие пять положений.

1. Интересующий нас по каким-либо причинам сигнал S является некоторой функцией s времени t, удовлетворяющей равенству

$$s=s(t), \tag{2.1}$$

и эта функция является непрерывной и хотя бы один раз дифференцируемой.

2. Измерения сигнала S осуществляются в дискретные и равноотстоящие моменты времени t_k, связанные рекуррентным соотношением вида

$$t_k = t_{k-1} + \Delta t, \quad k = 1,2,3,..., \tag{2.2}$$

где Δt - некоторый постоянный интервал времени t, а $t_0=0$.

3. Измеренные значения $\tilde{s}_k = \tilde{s}(t_k)$ сигнала S удовлетворяют следующим равенствам:

$$\tilde{s}_k = s_k + \varepsilon_k, \quad k = 0,1,2,3... \tag{2.3}$$

4. Ошибки измерения ε_k являются значениями случайных величин $\boldsymbol{\mathcal{E}}_k$, k=0,1,2,3,…, удовлетворяющих условиям вида

$$а)\ M\{\varepsilon_k\}=0;\ б)\ D\{\varepsilon_k^2\}=\sigma_k^2;\quad в)\ M\{\varepsilon_k\,\varepsilon_{k-1}\}=0, \tag{2.4}$$

где $M\{\varepsilon_k\}$ и $D\{\varepsilon_k^2\}$ - математическое ожидание и дисперсия случайной величины ε_k, соответственно а $M\{\varepsilon_k\,\varepsilon_{k-1}\}$ - ковариация случайных величин ε_k и ε_{k-1}; σ_k^2 - некоторое ограниченное число.

5. В каждый момент времени t_k у нас имеются m измеренных значений

$$\tilde{s}_{k-m+1}, \tilde{s}_{k-m+2}, ..., \tilde{s}_{k-1}, \tilde{s}_k, \tag{2.5}$$

сигнала S, полученных в моменты времени $t_{k-m+1}, \ldots, t_{k-1}, t_k$. Здесь m – некоторое ограниченное натуральное число.

Сущность задачи ЦДС в реальном времени заключается в том, чтобы, используя значения (2.5), вычислить оценку $\tilde{p}_k$ его производной p_k, и делать это так, чтобы имело место приближенное равенство

$$\tilde{p}_k \approx p_k, \tag{2.6}$$

и это равенство выполнялось как можно точнее.

Анализ литературных источников, посвящённых различным проблемам и методам ЦДС [3], позволяет видеть, что в настоящее время имеется значительное число подобных методов, базирующихся на различных идеях и подходах к их разработке. Одним из таких методов является метод, основанный на использовании интегральных уравнений Вольтерра.

3. Метод решения задачи ЦДС с использованием уравнения Вольтерра. Данный метод основан на использовании связи между сигналом $s(t)$ и его производной n-го порядка, которая адекватно описывается интегральным уравнением Вольтерра следующего вида:

$$\int_0^t \frac{1}{(n-1)!}(t-\tau)^{n-1} p^{(n)}(\tau)d\tau = s(t), \tag{3.1}$$

где $p^{(n)}(\tau)$ - производная n-го порядка от сигнала S в моменты времени τ, а τ - переменная интегрирования.

Полагая в данном уравнении $n=1$ и учитывая при этом равенства, $0!=1$ и $(t-\tau)^0=1$, можно видеть, что для производной первого порядка $p(t)$ сигнала $s(t)$ уравнение (3.1) имеет следующий вид:

$$\int_0^t p(\tau)d\tau = s(t). \tag{3.2}$$

Дифференцируя обе части данного уравнения по t, получим равенство:

$$p(t)=ds/dt, \tag{3.3}$$

которое является определением производной $p(t)$ сигнала $s(t)$ и доказывает адекватность описания связи между ними с помощью уравнения (3.1).

В поставленных выше условиях можно вести речь о решении интегрального уравнения (3.2) только численными методами, заменяя его системой линейных алгебраических уравнений, решение которой близко к его решению. Заменим уравнение (3.2) системой линейных алгебраических уравнений, аппроксимируя интеграл суммой по методу прямоугольников. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\sum_{i=0}^{k} p(t_0+t_i)\Delta t = s(t_0+t_k); \quad k=\overline{1,n}, \tag{3.4}$$

где $t_0=0$.

Для удобства и упрощения дальнейших исследований приведем получившуюся систему к более компактному векторно-матричному виду:

$$K\,\overset{\downarrow}{\tilde{p}} = \overset{\downarrow}{\tilde{s}}, \tag{3.5}$$

где $\overset{\downarrow}{\tilde{p}}$ - n-мерный вектор-столбец оценок производной $p(t)$ в моменты времени $t_k; k=\overline{1,n}$, n – натуральное число удовлетворяющее равенству $n=t/\Delta t$; K и $\overset{\downarrow}{\tilde{s}}$ - матрица порядка n и n -мерный вектор измеренных значений сигнала в эти же моменты времени t_k, определяемые следующими равенствами:

$$K = \begin{bmatrix} \Delta t & 0 & ... & 0 \\ \Delta t & \Delta t & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ \Delta t & \Delta t & ... & \Delta t \end{bmatrix} \quad (3.6а) \qquad и \qquad \overset{\downarrow}{\tilde{s}} = \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ ... \\ \tilde{s}_n \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Как видно из (3.6), матрица K является нижней треугольной матрицей и все её не равные нулю элементы, расположенные на главной диагонали и ниже равны Δt. Воспользовавшись определением матрицы K^{-1}, обратной к матрице K, и составив матричное уравнение $KX=E_n$, где E_n - единичная порядка n матрица, а X - искомая нами обратная матрица K^{-1}

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} \Delta t^{-1} & 0 & ... & 0 & 0 \\ -\Delta t^{-1} & \Delta t^{-1} & ... & 0 & 0 \\ 0 & -\Delta t^{-1} & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & -\Delta t^{-1} & \Delta t^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Остановимся теперь на вычислении оценок производной сигнала S при этом заметим, что решением уравнения (3.5) является вектор $\overset{\downarrow}{\tilde{p}}$, вычисляемый в соответствии со следующим равенством:

$$\overset{\downarrow}{\tilde{p}} = K^{-1}\overset{\downarrow}{\tilde{s}}, \quad (3.8)$$

из которого видно что, процедура дифференцирования сигнала S сводится к умножению матрицы K^{-1} на вектор $\overset{\downarrow}{\tilde{s}}$. Представим данное векторное равенство в покомпонентном виде, учитывая при этом равенства (3.6б) и (3.8). В результате получим следующие равенства:

$$\tilde{p}_1 = \tilde{s}_1 \Delta t^{-1}, \quad (3.9)$$

$$\tilde{p}_k = (\tilde{s}_k - \tilde{s}_{k-1})\Delta t^{-1}, \quad k = \overline{2,n}. \quad (3.10)$$

Анализируя данные равенства, можно заметить два факта. Во-первых, компонента $\tilde{p}_1$, оказывается явно не неверной оценкой производной p_1 сигнала S и не будет чрезмерно грубой оценкой, в единственном случае, когда значение сигнала S, предшествующее его значению s_1, будет равно нулю. Во-вторых, равенства (3.10) являются простейшим методом ЦДС.

Рассмотрим более детально какую-либо одну из оценок $\tilde{p}_k$, вычисляемых в соответствии с равенством (3.10) и заменим у них индекс k на t, а саму оценку $\tilde{p}_k$ обозначим символом $\tilde{p}_t$. Воспользовавшись нашим предположением (2.3), запишем равенство

$$\tilde{p}_t = (\tilde{s}_t - \tilde{s}_{t-1})\Delta t^{-1} = (s_t - s_{t-1})\Delta t^{-1} + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})\Delta t^{-1}. \quad (3.11)$$

Из данного равенства можно видеть, что во-первых, при достаточно малых значениях Δt первое слагаемое $(s_t - s_{t-1})\Delta t^{-1}$ оказывается достаточно точной оценкой производной p_t и поэтому можно считать, что имеет место равенство:

$$\tilde{p}_t = p_t + \Delta\varepsilon_t \Delta t^{-1}, \quad (3.12)$$

где $\Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$. Во-вторых, при достаточно малых значениях Δt и конечном значении $\Delta\varepsilon_t$ второе слагаемое $\Delta\varepsilon_t \Delta t^{-1}$ может оказаться чрезмерно большим, а оценка $\tilde{p}_t$ - не иметь ничего общего со значением p_t. В-третьих, оценка $\tilde{p}_t$ производной p_t, вычисляемая в соответствии с равенством (3.12), оказывается чрезмерно чувствительной к ошибкам задания значения сигнала S, а задача её вычисления некорректной задачей.

4. Регуляризация. Для устранения чрезмерной чувствительности алгоритма к ошибкам измерения ε_t и ε_{t-1} сигнала S, данный алгоритм необходимо регуляризировать. Для решения рассматриваемой задачи регуляризации алгоритма можно воспользоваться многими известными в настоящее время методами, предложенными как отечественными [1], так и зарубежными математиками [5]. Рассмотрим один из методов регуляризации, впервые предложенный нами в работе [4], сущность которого составляют следующие рассуждения и действия.

Представим оценку $\tilde{p}_t$, вычисленную в соответствии с рассмотренным выше алгоритмом, в следующем виде:

$$p_t + \Delta_t = \tilde{p}_t, \tag{4.1}$$

где p_t - неизвестное, истинное значение производной в момент времени t и Δ_t неизвестное значение ошибки оценивания значения p_t с помощью оценки $\tilde{p}_t$.

Для удобства и сокращения последующего изложения введём в рассмотрение вектор-строку $\vec{a}_t$ и вектор-столбец $\overset{\downarrow}{x}_t$, определив их следующими равенствами:

$$\vec{a}_{tr} = (1\ r_t), \tag{4.2}$$

$$\overset{\downarrow}{x}_t = (p_t\ \Delta_t)^T, \tag{4.3}$$

где r_t - некоторое, отличное от нуля число, которое далее будем называть параметром регуляризации рассматриваемого алгоритма; T - символ операции транспонирования. Используя введённые векторы $\vec{a}_{tr}$ и $\overset{\downarrow}{x}_t$, представим уравнение (4.1) в следующем более компактном виде:

$$\vec{a}_t \overset{\downarrow}{x}_t = \tilde{p}_t. \tag{4.4}$$

Данное уравнение имеет континуум решений, одним из которых является его истинное решение, определяемое из всего этого множества решений равенством (4.4). Всюду далее будем использовать псевдорешение данного уравнения, которое обозначим символом $\overset{\downarrow}{x}_{t+}$.

Легко убедиться в том, что псевдорешение $\overset{\downarrow}{x}_{tr+}$ может быть вычислено в соответствии с равенством

$$\overset{\downarrow}{x}_{tr+} = (1 + r_t^2)^{-1} \overset{\downarrow}{a}_{rt} \overset{\downarrow}{\tilde{p}}_t, \quad \overset{\downarrow}{a}_{rt} = (\vec{a}_{rt})^T. \tag{4.5}$$

Запишем найденное решение $\overset{\downarrow}{x}_{tr+}$ в развёрнутом виде:

$$\text{а)}\ \hat{p} = \tilde{p}_t (1 + r_t^2) \quad \text{и} \quad \text{б)}\ \hat{\Delta}_t = \tilde{p}_t / (1 + r_t^2), \tag{4.6}$$

где p и Δ_t - оценки производной p_t сигнала S и ошибки Δt её оценивания в момент времени t. Обе полученные оценки являются явно заданными функциями параметра регуляризации r_t и их точность и устойчивость определяются выбором его значений. Возникает вопрос: каким образом выбирать значение r_t и какими критериями при этом необходимо пользоваться?

Как известно, максимальная погрешность измерительного устройства, всегда указывается в сопровождающей его документации и при этом для каждого из интервалов значений измеряемой величины, она оценивается в процентах от наибольшего по модулю значения. В нашей ситуации это означает, что нам известны максимальные значения ε_{tmax} и s_{tmax}, удовлетворяющие соотношениям:

$$\text{а)}\ |\varepsilon_t| \le \varepsilon_{t\max}; \quad \text{б)}\ |s_t| \le s_{t\max} \quad \text{и} \quad \text{в)}\ \varepsilon_{t\max} \le 0{,}01\gamma \le s_{t\max}, \tag{4.7}$$

где γ - число процентов, указываемое в упомянутой выше документации. Используя приведённые выше характеристики ошибок измерения ε_t и значения s_t сигнала S, можно вычислить величину

$$\delta_{\max}^2 = \varepsilon_{t\max}^2 / s_{t\max}^2 = p^2 10^{-4}. \tag{4.8}$$

Очевидно, что значения $\delta_{\max}^2$ и δ^2, не равны. Однако, если речь идёт об измерениях сигнала S с помощью более или менее точного измерительного устройства, то можно считать, что имеет место приближённое равенство

$$\delta^2 \approx \delta_{\max}^2. \tag{4.9}$$

Именно это приближённое равенство и является одним из аргументов, оправдывающих замену δ^2 на величину $\delta_{\max}^2$.

5. Некоторые результаты экспериментальных исследований. Чтобы избавиться от необходимости учитывать составляющую погрешности оценивания производной, обусловливаемую конечностью приращений Δs и Δt дифференцируемого сигнала и времени, используемых при вычислении оценок производной, во всех проведённых экспериментах предполагалось, что сигнал S являлся линейной функцией времени и его производная p была равной 10.0. Исследование помехоустойчивости алгоритма проводилось в условиях, когда с ошибками задавались только значения сигнала S. При этом в качестве измеренных значений s_i данного сигнала использовались значения $\tilde{s}_t$ определяемые в соответствии с соотношением

$$\tilde{s}_t = s_t + \varepsilon_t, \quad t = 1,2,3,..., \tag{5.1}$$

где s_t – истинное значение сигнала, а ε_t - некоторое значение ошибки его измерения в момент времени t. Случайные числа ε_t получались с помощью программы, генерирующей равномерно распределенные случайные числа β_t из интервала [0,1], и их преобразования в ε_t в соответствии с формулой:

$$\varepsilon_t = 2a\beta_t - a. \tag{5.2}$$

Полученные случайные числа ε_t принадлежат интервалу $[-a,a]$, симметричному относительно нуля, и являются равномерно распределенными на данном интервале. Плотность данного закона распределения $p(\varepsilon_t)=1/2a$. Значение a, определяющее границы интервала $[-a,a]$, задавалось по формуле

$$a = 0.01\sqrt{3}\,\rho\,\bar{s}, \tag{5.3}$$

где ρ - величина среднеквадратической относительной ошибки задания значений $s=s(t)$ сигнала S, удовлетворяющая равенству

$$\rho = \sigma_\varepsilon / \bar{s}, \tag{5.4}$$

и выраженная в процентах, а $\bar{s}$ - среднеквадратическое значение сигнала S.

Ниже приведен график, характеризующий поведение исследуемого алгоритма. Все результаты исследований приведены с уровнем ошибок дифференцируемого сигнала, равным 5 %. На рис. 1 изображена зависимость погрешности оценивания производной дифференцируемого сигнала от значений параметра регуляризации, где в качестве меры погрешности использованы значения среднеквадратических отклонений вычисленных значений производной от их истинных значений. При этом параметр регуляризации r_t изменялся следующим образом:

$$\text{а)}\ r_t=r_{опт}(1+0.01n) \quad \text{и} \quad \text{б)}\ r_t=r_{опт}(1-0.01n), \tag{5.5}$$

где $r_{опт}$ - оптимальное значение параметра регуляризации r_t, вычисленное в соответствии с равенством $r_t=\sigma_t/10$, при котором ошибка вычисления производной является минимальной, а n = 1, 2,…,50.

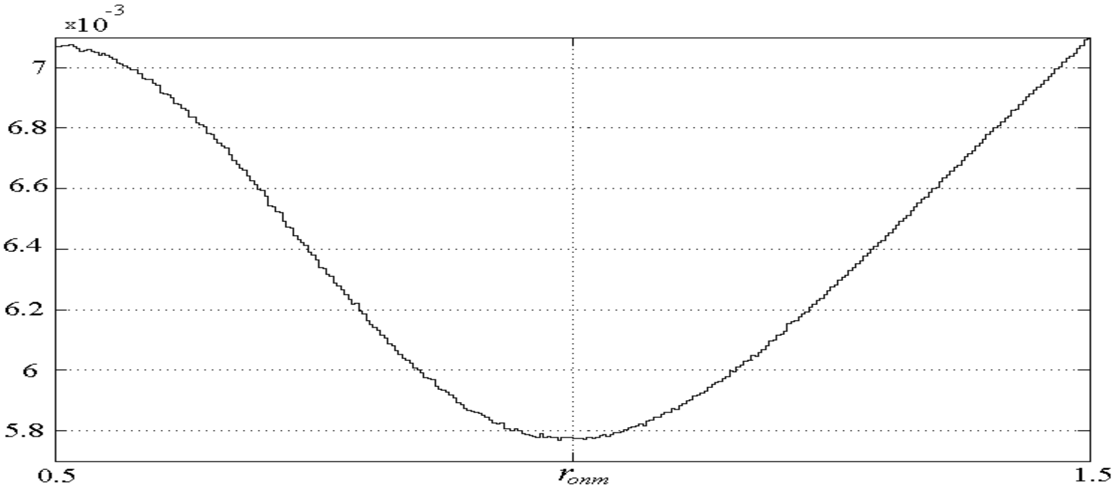

Рис. 1.

Вывод

Как видно из рисунка, любое отклонение параметра регуляризации r_t от его оптимального значения приводит к увеличению погрешности вычисления производной. Изменяя параметр регуляризации, можно весьма существенно увеличить помехоустойчивость алгоритма. В рассматриваемом случае погрешность вычисления производной уменьшилась приблизительно на 20%.

Список литературы

1. Арсенин В. Я., Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач.– М: Наука, 1979.– 286 с.

2. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения – М: Физматлит, 2002.– 160 с.

3. Васин, В. В. Об устойчивом вычислении производной. // Вычислительная математика и математическая физика. – 1973. – № 6 Т. 13. – С. 1383–1389.

4. Светлаков А. А. Нетрадиционный подход к регуляризации плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений. // СИБКОНВЕРС'95: Междунар. конф. по использованию результатов конверсии науки в вузах Сибири для международного сотрудничества. – Томск.: 1996. – Т. 1. – С. 132–133.

5. *Cruceanu S.* Regularisation pour les problemes a operateurs monotones et la methode de Galerkine. – Comment Math. Univ. Carol., 1971, 12, N1.

DIGITAL DIFFERENTIATION OF SIGNALS WITH USE OF THE INTEGRATED EQUATIONS OF VOLTERRA, AND ITS APPLICATION FOR MODELING OF CONTROL SYSTEMS AND CONTROL IN POWER ELECTRONICS

A.V. Maystrenko, A. A. Svetlakov, A. G. Garganeev

In article the new original way of digital differentiation of the signals, intended for use in real time is offered and investigated. The way is based on application of the integrated equations of Volterra I of a sort. Some results of pilot studies illustrating its working capacity and suitability for use in systems of automatic control of real time are given.

Keywords*: differentiation, integrated equation, regularization, matrix.*

1. Arsenin V.Y., Tihonov A.N. Methods of the solution of incorrect tasks.– Moscow.: Science, 1979.– 286 p. (Rus.)

2. Vasilieva A.B., Tikhonov N.A. Integral equations. – 2-nd ed stereotype. – Moscow.: Phizmatlit, 2002. – 160 p. (Rus.)

3. Vasin V.V. Ob steady calculation of a derivative. // Calculus mathematics and mathematical physics. – 1973 . – No. 6 T. 13. – Page 1383–1389. (Rus.)

4. Svetlakov A.A. The non-traditional approach to the regularization of ill conditioned linear algebraic equations. SIBKONVERS'95: proceedings of International conference on the use of the results of the conversion of science at the universities of Siberia for international cooperation. – Tomsk: 1996. – T. 1. – With. 132–133. (Rus.)

5. *Cruceanu S.* Regularisation pour les problemes a operateurs monotones et la methode de Galerkine. – Comment Math. Univ. Carol., 1971, 12, N1. (Eng.)