

Клепиков Володимир Борисович, д.т.н., професор кафедри автоматизовані електромеханічні системи, +38(050)647-81-70, klepikovvladimir390@gmail.com, ORCID ID: 0009-0003-9186-0769.

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61002*

Лапін Андрій Андрійович, бакалавр кафедри автоматизовані електромеханічні системи, +38(050)594-50-12, pixier2288@gmail.com

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»
вул. Кирпичова, 2, Харків, Україна, 61002*

МЕЖІ СТІЙКОСТІ У ТРИВИМІРНОМУ ПРОСТОРИ ДВОМАСОВОЇ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З ВІД'ЄМНИМ В'ЯЗКИМ ТЕРТЯМ

Анотація: У статті розглянуто висхідно нестійку двомасову електромеханічну систему з пружним зв'язком, нестійкість якої може виникати при переміщенні робочої точки по падаючій ділянці механічної характеристики нелінійного фрикційного навантаження, яке проявляє властивість від'ємного в'язкого тертя. Визначено межі стійкості системи у тривимірному просторі її параметрів. Використання математичної моделі у модифікованих узагальнених безрозмірних параметрах забезпечує універсальність отриманих результатів. Вибір параметрів у зоні стійкості забезпечує усунення фрикційних автоколивань. Наведено приклади комп'ютерного моделювання.

Ключові слова: електропривод, електромеханічна система, нелінійне тертя, характеристичний поліном, передатна функція, стійкість системи, метод Д-розбиття, фазові координати.

Klepikov Volodymyr, Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Automated Electromechanical Systems, +38(050)647-81-70, klepikovvladimir390@gmail.com, ORCID ID: 0009-0003-9186-0769.

*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»
2 St. Kirpychova, Kharkiv, Ukraine, 61002.*

Lapin Andrii, Bachelor of the Department of Automated Electromechanical Systems, +38(050)594-50-12, pixier2288@gmail.com

*National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»
2 St. Kirpychova, Kharkiv, Ukraine, 61002*

STABILITY LIMITS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE OF A TWO-MASS ELECTROMECHANICAL SYSTEM WITH NEGATIVE VISCOUS FRICTION

Abstract: The article considers an initially unstable two-mass electromechanical system with elastic coupling, the instability of which may arise when moving the operating point along the falling section of the mechanical characteristic of a nonlinear friction load exhibiting the property of negative viscous friction. The stability limits of the system in the three-dimensional space of its parameters are determined. The use of a mathematical model in modified generalized dimensionless parameters ensures the universality of the obtained results. Selecting parameters in the stability zone ensures the elimination of friction oscillations. Examples of computer simulation are presented.

Key words: *electric drive, electromechanical system, nonlinear friction, characteristic polynomial, transfer function, system stability, D-partition method, phase coordinates.*

Вступ. Однією з ключових задач сучасного електропривода (ЕП) є забезпечення заданих показників регулювання, що важливо для якісного виконання технологічних процесів. У класичній літературі з теорії електропривода динаміка електромеханічних систем (ЕМС) найчастіше розглядається з припущенням незалежності моменту навантаження від швидкості руху $M_c(\omega) = \text{const}$. Проте на практиці існують багато машин і механізмів, у яких $M_c(\omega) \neq \text{const}$ і являє собою нелінійну фрикційну залежність [0, 2]. До них, наприклад, відносяться електроприводи електровозів, електромобілів, валків прокатних станів у режим буксування або юзу, металорізальних верстатів та інших. Нелінійність фрикційного навантаження має так звану «падаючу ділянку», на якій збільшення швидкості проковзування супроводжується зменшенням моменту навантаження. При цьому навантаження проявляє себе як від'ємне в'язке тертя (ВВТ), за аналогією з «від'ємним електричним опором», який має місце у деяких напівпровідникових пристроях [2]. Наслідком знаходження робочої точки електропривода на падаючій ділянці може стати розбіжний характер динамічного процесу, який виникає при флуктуаційних відхиленнях робочої точки від точки статичної рівноваги. Це призводить внаслідок нелінійності характеристики тертя до виникнення, так званих, фрикційних автоколивань, які погіршують показники технологічного процесу: точність, продуктивність, надійність. Також збільшуються втрати енергії, підвищуються значення пружного моменту у кінематичних ланках ЕП. Відомий випадок, коли внаслідок фрикційних автоколивань мали місце на шахтах Донбасу поламки близько 150 осей колісних пар рудникових електровозів. З'ясувалось, що причиною поламок було збільшення пружного моменту в 16–20 разів відносно розрахункового статичного навантаження внаслідок виникнення фрикційних автоколивань в умовах механічного резонансу. Механічний резонанс виник при переході на нову конструкцію електровозів і встановленні передавального зубчастого колеса посередині осі.

Актуальність проблеми. Усунення фрикційних автоколивань (АФК) при проектуванні електроприводів з фрикційним навантаженням потребує знання умов виникнення їх в електромеханічній системі з нелінійним тертям. Це, зокрема, необхідно для того, щоб вибрати вірний спосіб автоматичного керування, який забезпечить стійкість ЕМС, що досягається усуненням розбіжного коливального динамічного процесу при знаходженні робочої точки на «падаючій» ділянці характеристики тертя. Для цього потрібно знати межі стійкості системи при різних значеннях параметрів розімкненої системи ЕП. В роботах [2, 3] визначення меж стійкості виконано у осях двох параметрів при фіксації інших незмінними і були надані графічні залежності в осях лише двох безрозмірних параметрів системи. Для більшої універсальності доцільно мати графічні залежності при зменшеній кількості фіксованих значень параметрів.

Мета роботи. Одержання меж стійкості у тривимірних координатах узагальнених модифікованих безрозмірних параметрах двомасової електромеханічної системи з від'ємним в'язким тертям та аналіз впливу параметрів на зону стійкості системи.

Об'єкт дослідження. Об'єкт дослідження у вигляді структурної математичної моделі двомасової ЕМС у фізичних параметрах з пружним кінематичним зв'язком і навантаженням, яке залежить від швидкості робочого органу, наведено на рис. 1, при наступних припущеннях:

- механічні величини вважаються приведеними до швидкості валу двигуна, тобто ω_1 ;
- вхідним сигналом є ω_0 – швидкість холостого ходу двигуна, яку задає напівпровідниковий перетворювач;
- динамічна ланка електромеханічного перетворення енергії являє собою аперіодичну ланку першого порядку, що звичайно використовується для двигунів постійного струму з незалежним збудженням та для асинхронних двигунів, при переміщенні робочої точки по лінійній частині механічної характеристики;
- впливом внутрішнього в'язкого тертя кінематичного пружного зв'язку нехтуємо. Цей вплив суттєво менший на втрати коливальної енергії ніж втрати у

силовому колі електродвигуна (це припущення створює деякий позитивний запас стійкості відносно межі);

- швидкість поступального руху дорівнює нулю, що у реальних умовах відповідає буксуванню на місці (наприклад при старті на сніговій або льодовій поверхні). Це припущення пояснюється тим, що в реальних умовах, за час перехідного процесу при буксуванні та юзі, внаслідок значних мас автомобіля (потяга) поступальна швидкість, суттєво не змінюється, тому вона не впливає на характер динамічного процесу за вільною складовою і на розміщення межі стійкості.

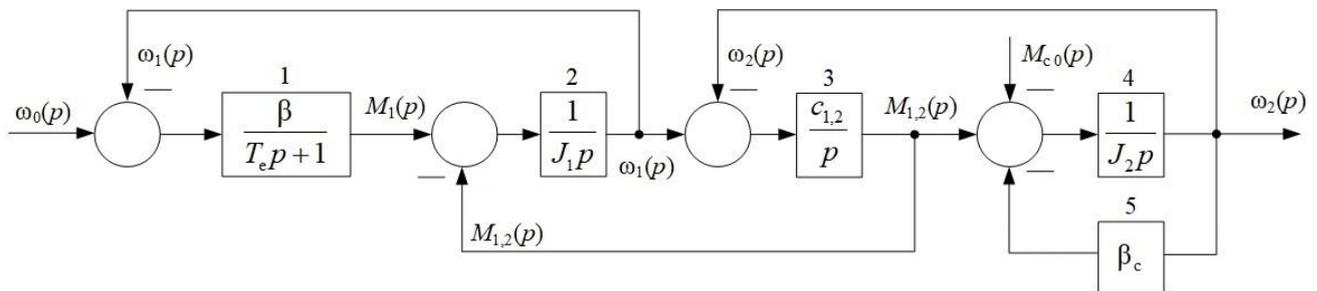


Рисунок 1 – Структурна схема двомасової електромеханічної системи у фізичних параметрах. *Розроблено авторами.*

Опишемо ланки системи, величини, що їх характеризують, та фазові координати.

Перша ланка (на рис. 1 позначено цифрою 1) – аперіодична ланка першого порядку, відображає електромеханічне перетворення енергії у двигуні (ДПС НЗ або АД). Величини β та T_c – відповідно, модуль жорсткості робочої ділянки механічної характеристики та електромагнітна стала часу електроприводу, p – оператор диференціювання.

Друга, третя та четверта – інтегруючі ланки, що відображають інерційний характер впливу на швидкість руху моментів інерції першої J_1 та другої маси J_2 , та жорсткості $c_{1,2}$, на пружний момент кінематичного зв'язку.

П'ята ланка – пропорційна, де β_c – жорсткість лінеаризованої ділянки механічної характеристики фрикційного навантаження.

Фазові координати системи: $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ – відповідно, задана кутова швидкість холостого ходу, швидкість валу якоря двигуна та другої маси (робочого органу та жорстко пов'язаних з ним мас); $M_1, M_{1,2}$ – відповідно момент на валу електродвигуна та пружний момент; M_c – момент фрикційного навантаження.

Нелінійне фрикційне навантаження має той же характер, що і коефіцієнт пари тертя при проковзуванні. Лінійна апроксимація моменту M_c від швидкості проковзування, приведеного до швидкості ω_1 , наведена на рис. 2.

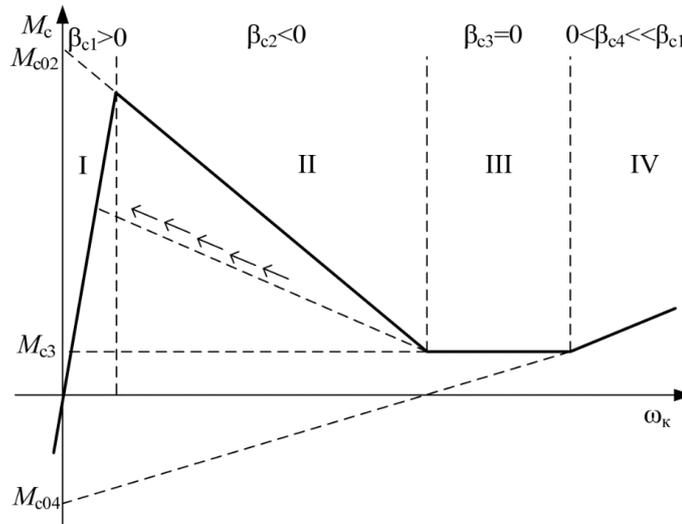


Рисунок 2 – Лінійаризована механічна характеристика опору фрикційного навантаження. Розроблено авторами.

У загальному випадку для кожної з характерних ділянок момент опору M_c дорівнює

$$M_c = M_{c0i} + \beta_{ci} \omega_k, \quad (1)$$

де M_{c0i} – відповідає точці перетину механічної характеристики навантаження з віссю моменту при $\omega_k = 0$, Н·м;

$\beta_{ci} = \frac{\Delta M_c}{\Delta \omega_k}$ – жорсткість механічної характеристики фрикційного навантаження,

Н·м·с.

З рис. 2 видно, що:

- I ділянка крута висхідна – $M_{c0} = 0, \beta_c \gg 0$;
- II ділянка падаюча – $M_{c0} = M_{c02}, \beta_c < 0$;
- III ділянка незмінного навантаження (сухе тертя) – $M_{c0} = \text{const}, \beta_c = 0$;

IV слабовисхідна ділянка – $M_{c0} = M_{c03}, \beta_c > 0$.

Саме коли робоча точка знаходиться на падаючій ділянці, вільна складова динамічного процесу може мати коливальний розбіжний характер, що викликає фрикційні автоколивання [2, 4].

З наведеної структурної схеми на рис. 1, динамічний процес за вільною складовою залежить від значень 6-ти фізичних параметрів. Побудувати графічні залежності меж стійкості у шестивимірному просторі неможливо, і навіть, якщо будувати межі у двох осях якихось параметрів, 4 прийдеться вважати незмінними. Це утруднює отримання наочного виду меж стійкості і ускладнює аналіз впливу на них параметрів ЕМС.

У роботах [2, 5] для схеми, яка аналізується, було запропоновано використання безрозмірних узагальнених параметрів, що дозволило скоротити їх кількість до 4-х і універсалізувати їх вигляд. На рис. 3 наведено структурну схему двомасової ЕМС з ВВТ у модифікованих узагальнених безрозмірних параметрах.

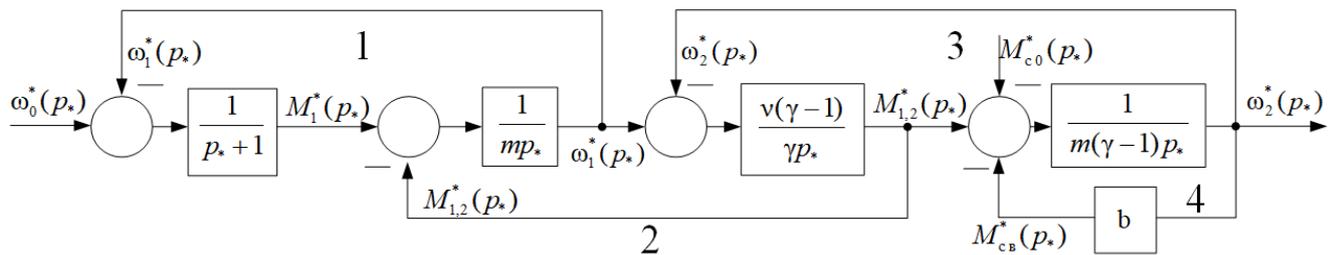


Рисунок 3 – Структурна схема двомасової електромеханічної системи у модифікованих параметрах з відміткою контурів

За базові координати системи прийнято загальновідомі величини, такі як: момент короткого замикання двигуна $M_{кз} = \beta \cdot \omega_0$ для моментів та швидкість холостого ходу електроприводу ω_0 природної характеристики для кутових швидкостей [4]. В даній структурній схемі (рис. 3):

- за одиницю часу прийнято електромагнітну сталу часу електродвигуна T_e , тобто

$$t^* = t / T_e, \tag{2}$$

- при цьому оператор диференціювання у безрозмірній формі приймає вигляд

$$p_* = T_e p; \tag{3}$$

- узагальнений безрозмірний параметр відношення електромеханічної до електромагнітної сталих часу

$$m = \frac{T_{M1}}{T_e}, \quad (4)$$

де: T_{M1} – електромеханічна стала часу першої маси, що розраховується як

$$T_{M1} = \frac{J_1}{\beta}; \quad (5)$$

- відношення жорсткості механічної характеристики фрикційного навантаження до модуля жорсткості статичної МХ електропривода

$$b = \frac{\beta_c}{\beta}; \quad (6)$$

- коефіцієнт співвідношення має вигляд:

$$\gamma = \frac{J_1 + J_2}{J_1}; \quad (7)$$

- відношення квадратів частот недемпфованих механічних коливань до електромеханічних:

$$v = \frac{\Omega_{12}^2}{\Omega_{em}^2}, \quad (8)$$

де: Ω_{em} – кутова частота недемпфованих електромеханічних коливань електродвигуна, рад/с, що розраховується як

$$\Omega_{em} = \frac{1}{\sqrt{T_e T_{M1}}}, \quad (9)$$

де: Ω_{12} – кутова частота пружних недемпфованих коливань двомасової механічної системи, рад/с, що дорівнює

$$\Omega_{12} = \sqrt{\frac{C_{12}(J_1 + J_2)}{J_1 J_2}}. \quad (10)$$

Теоретичне обґрунтування можливості побудування меж стійкості системи з використанням методу Д-розбиття та прикладом їх побудови у площині двох параметрів було викладено, але, як бачимо вище, система, що досліджується, має 4 параметри. З метою більшої універсальності і наочності результатів доцільно

збільшити кількість координат. Нижче наведено хід побудови і співвідношення для визначення меж стійкості у тривимірному просторі модифікованих узагальнених безрозмірних параметрів. Для винайдення характеристичного поліному системи використано топологічні методи [6].

Для схеми, що зображена на рис. 3, передатна функція системи за формулою Мезона визначається як :

$$W(p) = \frac{\omega_2^*(p)}{\omega_0^*(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m P_i \cdot \Delta_i}{\Delta}, \quad (11)$$

Де P_i – i -й шлях від вхідного сигналу до координати, що цікавить; q – кількість шляхів; Δ – визначник системи, що розраховується як добуток:

$$\Delta = \prod_{k=1}^m (1 - L_k)^* \quad (12)$$

де L_k – передача k -го контуру, що представляє добуток передавальних функцій (ПФ) ланок, які входять до нього (при цьому ПФ негативної ОС враховується зі знаком «мінус»); m – число контурів схеми.

Знак «*» означає, що під час визначення виразу (12) всі добутки, в яких присутні передачі дотичних контурів, тобто таких, що мають хоча б одну спільну гілку або один спільний вузол, виключаються (приймаються рівними нулю) [6].

Враховуючи, що шлях від вхідного сигналу ω_0 до вихідної координати ω_2 лише один, тобто алгебраїчний доданок $\Delta_1 = 1$. За методикою знаходження визначника системи Δ , знаходимо характеристичний поліном системи (ХП) [3]. Після його нормування (ділення всіх коефіцієнтів на коефіцієнт при найвищому четвертому ступені безрозмірного оператора p^*) та заміни p^* на $j\Omega_*$ (де Ω_* – змінний частотний параметр) отримуємо характеристичний комплекс у вигляді

$$D(j\Omega_*) = \left[m^2 \gamma (\gamma - 1) \right] \Omega_*^4 - \left[m \gamma (v (\gamma - 1) + b + \gamma - 1) \right] \Omega_*^2 + \\ + j \left\{ - \left[m \gamma (b + (\gamma - 1)m) \right] \Omega_*^3 + \left[(\gamma - 1)(m \gamma + b)v + b \gamma \right] \Omega_* \right\} + v (\gamma - 1)(b + 1) \quad (13)$$

Виникнення АКФ можливе при знаходженні робочої точки, що визначається параметрами системи m , b , v та γ , в зоні розбіжного коливального перехідного процесу. Для отримання меж стійкості в залежності від значень

параметрів системи, використаємо метод Д-розбиття [4]. Межі стійкості відповідають параметри, які при зміні частоти Ω_* забезпечать для характеристичного комплексу умову :

$$D(j\Omega_*) = 0.$$

Це виконується, коли дійсна частина:

$$\operatorname{Re}(\Omega_*) = \left[m^2 \gamma (\gamma - 1) \right] \Omega_*^4 - \left[m \gamma (v (\gamma - 1) + b + \gamma - 1) \right] \Omega_*^2 + v (\gamma - 1) (b + 1) = 0, \quad (14)$$

а також уявна частина:

$$\operatorname{Im}(\Omega_*) = - \left[m \gamma (b + (\gamma - 1) m) \right] \Omega_*^3 + \left[(\gamma - 1) (m \gamma + b) v + b \gamma \right] \Omega_* = 0. \quad (15)$$

Винайдемо параметр b з співвідношення (15),

$$b = - \frac{m \gamma (\gamma - 1) (m \Omega_*^2 - v)}{(m \Omega_*^2 - v - 1) \gamma + v}. \quad (16)$$

Підставивши співвідношення (16) у вираз (14), отримаємо рівняння для знаходження m відносно параметрів γ , v та частоти Ω_*

$$\frac{R}{m \gamma \Omega_*^2 - \gamma (v + 1) + v} = 0, \quad (17)$$

де R – чисельник, що має вигляд:

$$R = (\Omega_*^2 + 1) (\gamma - 1) \Omega_*^4 \gamma^2 m^3 - \left[(v \Omega_*^2 + \Omega_*^2 + v) \gamma - \frac{(\Omega_*^2 + 1) v}{2} \right] 2 \gamma (\gamma - 1) \Omega_*^2 m^2 + \left[\left((\Omega_*^2 + 1) v^2 + 2 v \Omega_*^2 + \Omega_*^2 \right) \gamma - (\Omega_*^2 + 1) v^2 \right] \gamma (\gamma - 1) m - v (\gamma - 1) (v (\gamma - 1) + v). \quad (18)$$

Символьні розрахунки були виконані у математичному пакеті «Maple», що дозволило збільшити точність розрахунків. Для знаходження значення m до нуля прирівнюється чисельник (18), оскільки знаменник відношення (17) не може дорівнювати нулю. Але символічно поліном R неможливо вирахувати для отримання однозначної формули m , тому для побудови межі стійкості буде використовуватись у поданому вигляді.

Графічна частина. Побудовано межі стійкості у тривимірному просторі (рис. 4), за описаними вище рівняннями (18, 16) за допомогою пакету MATLAB [0]. Використано 3 значення γ та 50 значень v в діапазоні від 3 до 30 для створення

трьох площин. Програма для побудови меж стійкості реалізувала наступний алгоритм:

- 1) обираються параметри γ та ν з масиву їх значень;
- 2) шляхом підстановки частотного параметра Ω_* у рівняння (18) отримується масив значень m (оскільки рівняння (18) третього порядку та дає три корені), серед них обирається дійсний найбільший);
- 3) за формулою (16) розраховується масив значень b ;
- 4) будується межа стійкості у просторі трьох координат для визначених значень γ та ν ;
- 5) цикл повторюється поки не будуть використані всі значення масивів γ та ν .

На рис. 4 область вище (по осі абсцис) межі стійкості є зоною стійкості для системи, що досліджується, а нижче – зоною розбіжного процесу, де система є нестійкою.

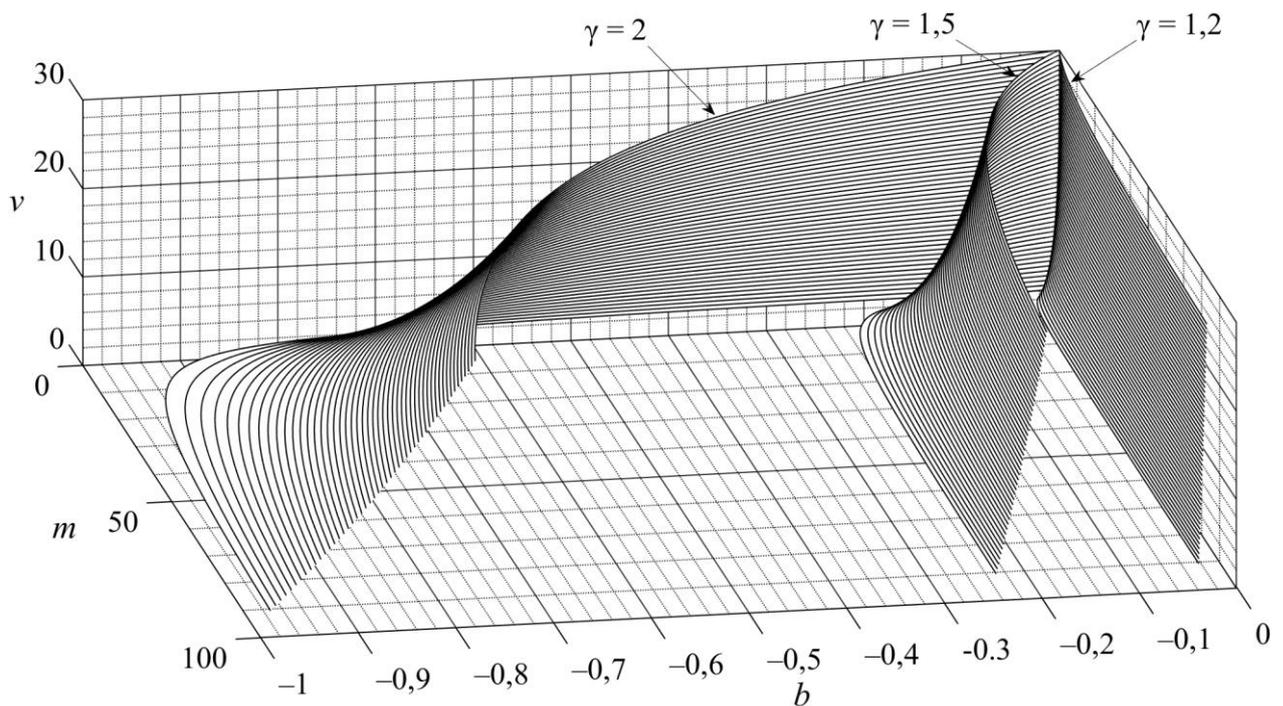


Рисунок 4 – Д-розбиття за двома параметрами у тривимірному просторі.
Розроблено авторами.

Зробимо висновки щодо впливу параметрів γ та ν . Перший розширює зону стійкості системи, а вплив його величини на зону стійкості має складний нелінійний характер. Наприклад, збільшення γ з 1,2 до 1,5 дало збільшення зони стійкості у приблизно 5 разів. Внаслідок цього, зроблено висновок щодо високої

чутливості системи до зміни цього параметра, тобто незначна зміна даного параметра може перевести систему в область стійкості.

Зі збільшенням параметру ν зменшується зона стійкості. Також особливістю є зміна зони від гіперболічного виду до більш лінійної залежності, де вигин збільшується в діапазоні значень m з 0 до 40 при зменшенні значення ν .

Проведемо перевірку отриманих меж стійкості. Вихідна координата системи, а саме швидкість другої маси ω_2 повинна мати консервативні коливання, тобто незгасаючі, якщо параметри системи дійсно відповідають межі стійкості. За зоною стійкості – розбіжний процес, а у зоні стійкості – згасаючі коливання. Використано для перевірки наступні значення параметрів, при яких система, за вірності отриманих меж, повинна знаходитися на межі стійкості: $m = 1,50321$, $b = -0,0768809$, $\nu = 19,5306$, $\gamma = 2$.

Проведено моделювання у MATLAB Simulink з використанням даного набору параметрів та структурної моделі, наведеної на рис. 3. Для виведення системи з зони стійкості параметр b множиться на 2, а для введення – ділиться на 2. Отримані результати зображено на рис. 5.

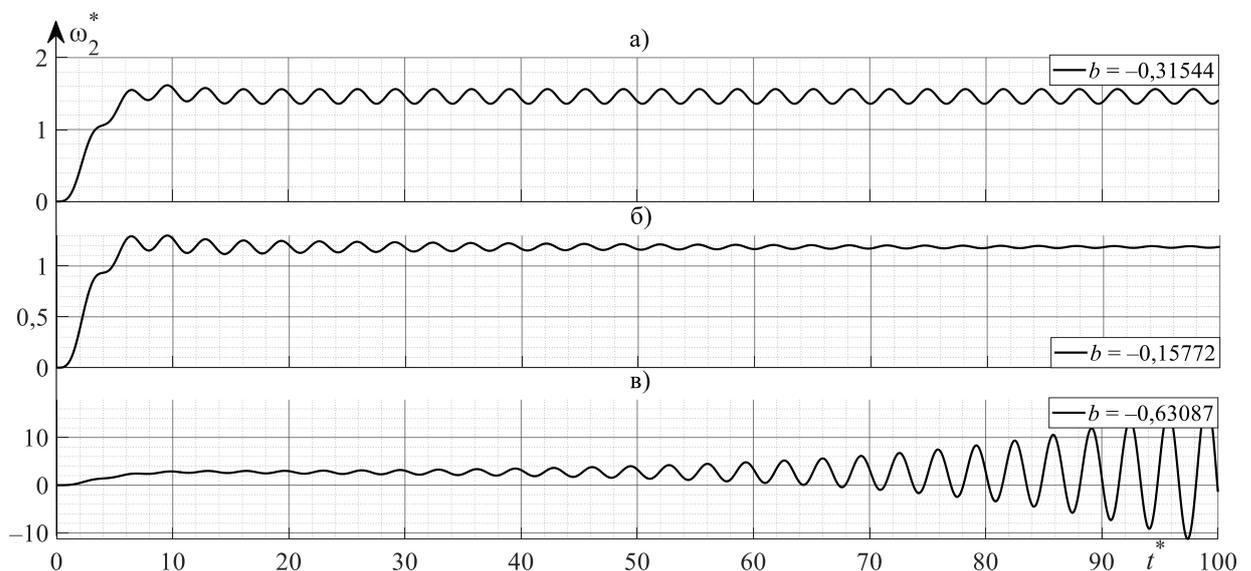


Рисунок 5 – Перехідні процеси системи на межі стійкості (а), у зоні стійкості (б) та за межею стійкості (в)

З часових діаграм на рис. 5 видно, що вони підтверджують теоретичні положення статті, одержані співвідношення та адекватність розрахованих меж стійкості.

Висновки. Одержано номограми меж стійкості у тривимірному просторі модифікованих узагальнених безрозмірних параметрів двомасової електромеханічної системи з пружним кінематичним зв'язком при знаходженні робочої точки на «падаючій ділянці» механічної характеристики нелінійного фрикційного навантаження. Комп'ютерним моделюванням підтверджено відповідність характеру динамічного процесу відносно розрахованих за запропонованою методикою меж стійкості. Встановлено залежності впливів параметрів γ та ν .

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Armstrong-Helouvry B. Control of Machines with Friction. Kluwer Academic Publishers. Boston / Dordrecht / London, 1991. 173 p.
2. Клепиков В. Б. Динаміка електромеханічних систем з нелінійним тертям: монографія. Харків : Вид во «Підручник НТУ «ХПІ»», 2014. 408 с.
3. Клепиков В. Б. Межі стійкості двомасової електромеханічної системи з фрикційним навантаженням у модифікованих узагальнених безрозмірних параметрах. *Енергозбереження. Енергетика. Енергоаудит = Energy saving. Power engineering. Energy audit*, 2025. № 3 (206). С. 3–15.
4. Попович М. Г. Електромеханічні системи автоматизації та електропривод: навч. Посіб. / М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков та ін.; за ред. М. Г. Поповича, О. Ю. Лозинського. Київ : Либідь, 2005. 680 с.
5. Обруч І. В. Синтез електромеханічних систем з нейронною мережею та фрикційним навантаженням : дис. ... канд. техн. наук. Харків, 2019.
6. Долбня В.Т. Топологический анализ и синтез электрических и электромеханических систем. Харьков : НТУ «ХПИ», 2005. 356 с.
7. Tyagi A. MATLAB and SIMULINK for Engineers. New Delhi: Oxford University Press, 2012. 504 p.

REFERENCES:

1. Armstrong-Hélouvry B. (1991). *Control of Machines with Friction*. Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London. 173 p.
2. Klepikov V. B. (2014). "Dynamics of Electromechanical Systems with Nonlinear Friction: Monograph" ["Dynamika elektromekhanichnykh system z nelineinym tertiam: monohrafiia"], Pidruchnyk NTU "KhPI". Kharkiv. 408 p.
3. Klepikov V. B., Belyaev O. S., Lapin A. A. (2025). "Stability Limits of a Two-Mass Electromechanical System with Friction Load in Modified Generalized Dimensionless Parameters" ["Mezhi stiiikosti dvomasovoi elektromekhanichnoi systemy z fryktsiinyim navantazhenniam u

modyfikovanykh uzahalnennykh bezrozmirnykh parametrakh"]. *Energy Saving. Power Engineering. Energy Audit*. No. 3 (206). pp. 3–15.

4. Popovych M. G., Lozynskyi O. Yu., Klepikov V. B. et al. (2005). "Electromechanical Automation Systems and Electric Drive: Textbook" ["Elektromekhanichni systemy avtomatyzatsii ta elektropryvod: navch. posib."]. Lybid. Kyiv. 680 p.

5. Obruch I. V. (2019). "Synthesis of Electromechanical Systems with Neural Network and Friction Load" ["Syntez elektromekhanichnykh system z neironnoiu merezheiu ta fryktsiynym navantazhenniam"], PhD thesis. Kharkiv.

6. Dolbnya V. T. (2005). "Topological Analysis and Synthesis of Electrical and Electromechanical Systems" ["Topologicheskyy analiz i sintez elektricheskikh i elektromekhanicheskikh sistem"]. NTU "KhPI". Kharkiv. 356 p.

7. Tyagi A. (2012). *MATLAB and SIMULINK for Engineers*. Oxford University Press, New Delhi, 504 p.

Стаття надійшла до редакції: 02.12.2025; рецензування: 22.12.2025;

прийнята до публікації 05.01.2026. Автори прочитали и дали згоду рукопису.

The article was submitted on 02.12.2025; revised on 22.12.2025; and accepted for publication on 05.01.2026. The authors read and approved the final version of the manuscript.